Clase 3: El modelo de Ramsey

Hamilton Galindo

Macrodinámica

Outline

1. **Equilibrio del planificador social**
   - Restricción global de recursos
   - Problema del planificador social
   - El estado estacionario
   - Dinámica del modelo: diagrama de fase

Preliminares

- Las condiciones de estabilidad son cruciales para generar soluciones numéricas del modelo.
- Las soluciones numéricas del modelo son un conjunto de series de tiempo de las variables endógenas.
- La versión discreta del modelo de Ramsey permite considerar una versión estocástica de la economía.
- Se asume que la tasa de crecimiento poblacional es η

$$\eta = \frac{N_t - N_{t-1}}{N_{t-1}}$$

- Se asume una tasa depreciación lineal δ
- Además, se asume una economía cerrada y sin gobierno.

Restricción global de recursos I

[1] La restricción presupuestaria agregada es:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{1}$$

Donde la función de producción es Cobb-Douglas:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{2}$$

Y la ecuación de la inversión es:

$$\begin{aligned} I_t &= I_t^{neta} + D_t \\ I_t &= (K_{t+1} - K_t) + \delta K_t \end{aligned} \tag{3}$$

K_{t+1} es el stock de capital elegido al final del periodo "t", el cual es usado para la producción en "$t+1$".
Al introducir la ecuación [3] en [1] se tiene:

Restricción global de recursos II

Restricción presupuestaria agregada

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

[2] La restricción presupuestaria per-cápita es:

$$\begin{aligned}
Y_t &= C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t \\
\frac{Y_t}{N_t} &= \frac{C_t}{N_t} + \frac{K_{t+1}}{N_t} - (1-\delta)\frac{K_t}{N_t} \\
y_t &= c_t + \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}\frac{N_{t+1}}{N_t} - (1-\delta)k_t \\
y_t &= c_t + k_{t+1}(1+\eta) - (1-\delta)k_t \qquad (4)
\end{aligned}$$

Restricción global de recursos III

Ley de movimiento del stock del capital

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+\eta}[f(k_t) - c_t + (1-\delta)k_t] = h(k_t, c_t) \tag{5}$$

El stock de capital al final de "t" es una función no lineal de k_t y c_t.

Problema del planificador social I

[1] El problema del planificador social en el modelo de Ramsey en tiempo discreto es el siguiente:

$$\underset{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

sujeto a la restricción total de recursos (en términos per-cápita):

$$f(k_t) = c_t + k_{t+1}(1+\eta) - (1-\delta)k_t$$

y con un stock de capital inicial dado (k_0) Donde:
La función de utilidad es CRRA

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Problema del planificador social II

$\sigma > 0$ y $\sigma \neq 1$ La función de producción Cobb-Douglas en términos per-cápita es:

$$y_t = f(k_t) = k_t^\alpha$$

[2] El Lagrange descontado es:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[U(c_t) + \lambda_t [f(k_t) - (c_t + k_{t+1}(1+\eta) - (1-\delta)k_t)] \right]$$

[3] Las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \mapsto \dot{U}_{c_t} + \lambda_t(-1) = 0$$

$$\dot{U}_{c_t} = \lambda_t \tag{6}$$

Problema del planificador social III

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \mapsto -\beta^t \lambda_t (1+\eta) + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (\dot{f}_{k_{t+1}} - (1-\delta)) = 0$$

$$\lambda_t (1+\eta) = \beta \lambda_{t+1} (\dot{f}_{k_{t+1}} - (1-\delta)) \tag{7}$$

Introduciendo la ecuación [6] en [7] se tiene la ecuación de Euler.

Ecuación de Euler

A la condición de Keynes-Ramsey en tiempo discreto se le conoce como la ecuación de Euler.

$$\dot{U}_{c_t} = \beta \dot{U}_{c_{t+1}} \left[\frac{\dot{f}(k_{t+1}) - (1-\delta)}{1+\eta} \right] \tag{8}$$

El estado estacionario

1. **Ecuación de Euler**
   De la ecuación de Euler se obtiene el capital de estado estacionario (k_{ss})

$$k_{ss} = \left(\frac{\alpha\beta}{1 + \eta + \beta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{9}$$

2. **Función de producción**

$$y_{ss} = k_{ss}^{\alpha} = \left(\frac{\alpha\beta}{1 + \eta + \beta(1-\delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{10}$$

3. **Restricción presupuestaria**

$$c_{ss} = y_{ss} - k_{ss}(\eta + \delta) \tag{11}$$

Dinámica del modelo: diagrama de fase I

[1]El sistema de ecuaciones en diferencias del modelo

El sistema de 2 ecuaciones que define la ley de movimiento del k_t y c_t es:

Ecu. Euler: $$c_{t+1} = \beta c_t \left[\frac{\dot{f}(k_{t+1}) - (1-\delta)}{1+\eta} \right]$$

RP global: $$k_{t+1} = \frac{1}{1+\eta}[f(k_t) - c_t + (1-\delta)k_t] = h(k_t, c_t)$$

En la ecuación de Euler se reemplaza k_{t+1} por la restricción presupuestaria obteniendose:

$$c_{t+1} = g(k_t, c_t)$$

El sistema de EED sería:

$$c_{t+1} = g(k_t, c_t)$$

Dinámica del modelo: diagrama de fase II

$$k_{t+1} = h(k_t, c_t)$$

Este sistema se graficará considerando el eje Y al c_t y al eje X al k_t.

[2]La curva del consumo de estado estacionario

- De la ecuación de Euler: $c_{t+1} = c_t$

$$\frac{1+\eta}{\beta} - (1-\delta) = \dot{f}(k_{t+1}) = \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}$$

- En la ecuación anterior se reemplaza k_{t+1} de la restricción presupuestaria:

$$\left[\frac{1+\eta-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{1}{1+\eta}[f(k_t) - c_t + (1-\delta)k_t] = h(k_t, c_t)$$

Dinámica del modelo: diagrama de fase III

- Despejando c_t, se tiene:

Curva de EE del c_t

$$c_t = -A + f(k_t) + (1-\delta)k_t$$

Donde:

$$A = (1+\eta)\left[\frac{1+\eta-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

- **¿Cómo es la tasa de crecimiento fuera del estado estacionario?**
  Para $c_{t+1} > c_t$
  Reemplazando c_{t+1} de la ecu. de Euler:

$$\beta c_t \left[\frac{\dot{f}(k_{t+1}) - (1-\delta)}{1+\eta}\right] > c_t$$

Dinámica del modelo: diagrama de fase IV

Eliminando c_t:

$$\frac{\beta}{1+\eta}(\dot{f}(k_{t+1})+(1-\delta))>1$$

Despejando k_{t+1}:

$$\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}>\frac{1+\eta}{\beta}-(1-\delta)$$

Dado que el exponente es negativo, al despejar k_{t+1} se invierte el signo $>$:

$$k_{t+1}<\left[\frac{1+\eta-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Reemplazando k_{t+1} de la RP:

$$\frac{1}{1+\eta}[f(k_t)-c_t+(1-\delta)k_t]<\left[\frac{1+\eta-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Dinámica del modelo: diagrama de fase V

Operando se tiene:

$$f(k_t) - c_t + (1-\delta)k_t < (1+\eta)\left[\frac{1+\eta-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$f(k_t) - c_t + (1-\delta)k_t < A$$

Despejando c_t se tiene:

$$-A + f(k_t) + (1-\delta)k_t < c_t$$

Donde la ecuación $-A + f(k_t) + (1-\delta)k_t$ representa la curva de estado estacionario del consumo c_t^{ss}

$$c_t^{ss} < c_t$$

Por tanto:

Dinámica del modelo: diagrama de fase VI

El consumo tendrá una tasa de crecimiento positivo cuando el consumo (eje Y) es mayor al consumo de estado estacionario (curva de $c_{t+1} = c_t$).

[3]La curva del capital de estado estacionario

- De la RP: $k_{t+1} = k_t$

$$(1 + \eta)k_{t+1} = f(k_t) - (1 - \delta)k_t - c_t$$

- Despejando el c_t

Curva de EE del k_t

$$c_t = f(k_t) - (\eta + \delta)k_t$$

Dinámica del modelo: diagrama de fase VII

- **¿Cómo es la tasa de crecimiento fuera del estado estacionario?**
  Para $k_{t+1} > k_t$
  Reemplazando k_{t+1} de la restricción presupuestaria:

$$\frac{1}{1+\eta}[f(k_t) - c_t + (1-\delta)k_t] > k_t$$

  Despejando c_t

$$c_t < f(k_t) - (\eta + \delta)k_t$$

$$c_t < c_t^{ss}$$

  Por tanto:
  El capital tendrá una tasa de crecimiento positivo cuando el consumo (eje Y) es menor al capital de estado estacionario (curva de $k_{t+1} = k_t$).

Diagrama de fase: curvas de estado estacionario

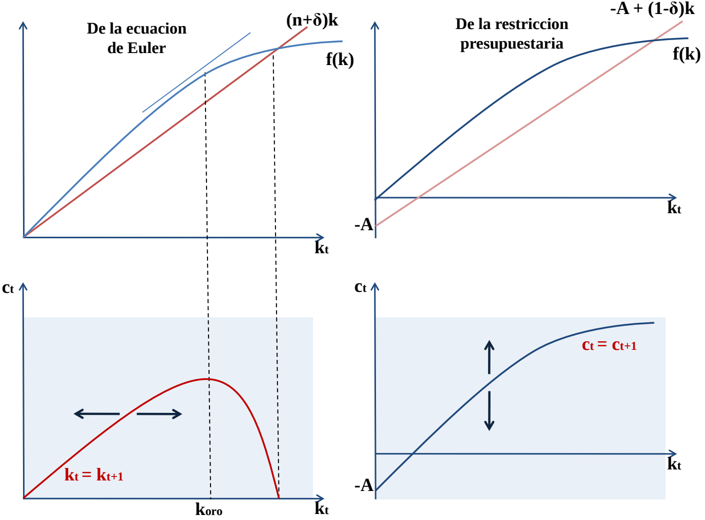

Diagrama de fase: senda de equilibrio estable