Clase 2: El modelo de Solow-Swan

Hamilton Galindo

Macrodinámica

Outline

1. **Descripción del modelo**
   - Supuestos
   - Dinámica de la economía
   - Estado estacionario
2. **Análisis del modelo**
   - Transición al estado estacionario
   - Convergencia
3. **Regla de oro**
4. **Solución del modelo**
   - Solución exacta
   - Cambio de parámetros estructurales

Supuestos I

1. **Tecnología**
La tecnología tiene las siguientes características:
   - Función homogenea de primer grado.
   - Presenta retornos a escala decrecientes para cada factor de producción (capital físico "K_t" y trabajo "L_t").
   - Cumple las condiciones de Inada:

$$\begin{aligned} \lim_{K \to 0} F_K &= \lim_{L \to 0} F_L = \infty \\ \lim_{K \to \infty} F_K &= \lim_{L \to \infty} F_L = 0 \end{aligned}$$

Una función de producción, a nivel agregado, que cumple con las características antes mencionadas es la **Cobb-Douglas**:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1) \tag{1}$$

Donde "A" es el factor de escala de la producción que afecta la productividad de los factores. Además, indica el nivel de *tecnología*.

Supuestos II

2. **Crecimiento tecnológico**
Se supone, aparte del nivel de tecnología ("A"), que existe una factor de productividad variable (*progreso tecnológico*) cuya tasa de crecimiento es constante:

$$\frac{\dot{\Gamma}}{\Gamma_t} = \gamma, \quad \forall t$$

y entra en la función de producción de la siguiente manera:

$$Y_t = F(K_t, \Gamma_t L_t)$$

Donde se dice que Γ_t es un tipo de progreso tecnológico *ahorrador de trabajo*, esto es por que con mayor Γ_t se produce lo mismo con un menor monto de trabajo.
Además, al factor $\Gamma_t L_t$ se le llama *trabajo efectivo*.

Supuestos III

3. **Ley del movimiento del capital físico**
   El capital físico se acumula en el tiempo por medio de la inversión (I_t). La inversión bruta (I_t) tiene dos componentes:
   - **Inversión neta:** definida como la variación del stock de capital ($\dot{K}_t$)
   - **Depreciación:** definida como la perdida de capital físico por su uso (D_t)
4. **Depreciación**
   Se asume que la tasa de depreciación del capital físico es constante (δ) tal que:
   $$D_t = \delta K_t$$
5. **Trabajo**
   Cada trabajador tiene una unidad de tiempo disponible en cada periodo que es ofertado inelasticamente en el mercado de trabajo. Esto permite identificar el número de trabajadores y la oferta de trabajo (N_t) en cada periodo.

Supuestos IV

6. **Mercado de trabajo**

Se asume que hay pleno empleo (precios y salarios flexibles):

$$\underbrace{L_t}_{\text{empleo}} = \underbrace{L_t}_{\text{oferta de trabajo}}$$

Esto permite obtener las variables en forma per-cápita (o por trabajador).

7. **Tipo de economía**

Se supone que la economía es cerrada y no hay gobierno, esto tiene dos implicancias:

- La restricción de recursos de la economía será:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{2}$$

Supuestos V

- El ahorro será igual a la inversión en términos agregados:

$$S_t = I_t \tag{3}$$

8. **Tasa de ahorro**

   Se asume que el ahorro es una fracción constante del producto (*supuesto fuerte*):

   $$S_t = sY_t$$

   En el modelo de Solow-Swan no se considera el comportamiento optimizador de los agentes económicos.

9. **Tasa de crecimiento poblacional**

   Se asume que la fuerza de trabajo y empleo (iguales para $\forall t$) crece a una tasa constante:

   $$N_t = N_0 e^{\eta t} \tag{4}$$

Dinámica de la economía I

1. **Función de producción:**

$$
\begin{aligned}
Y_t &= F(K_t, \Gamma_t L_t) \\
\frac{Y_t}{\Gamma_t L_t} &= F(\underbrace{\frac{K_t}{\Gamma_t L_t}}_{\text{stock de capital por unidad de trabajo efectivo}}, 1) \\
y_t &= f(k_t)
\end{aligned}
$$

Para el caso de una función Cobb-Douglas;

$$
Y_t = AK_t^{\alpha}(\Gamma L_t)^{1-\alpha}
$$
$$
y_t = Ak_t^{\alpha}
$$

Dinámica de la economía II

2. **Ley de movimiento de la economía:** Incluyendo la ecuación del ahorro ($I_t = S_t = sY_t$) en la ley de movimiento de capital se tiene:

$$sY_t = \dot{K}_t + \delta K_t$$

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t \tag{5}$$

3. **En términos de unidades de trabajo efectivo:**
    - Dividiendo la ecuación [5] por: ΓL_t

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}_t}{\Gamma L_t} &= \frac{sY_t}{\Gamma L_t} - \delta \frac{K_t}{\Gamma L_t} \\ \frac{\dot{K}_t}{\Gamma L_t} &= sy_t - \delta k_t \end{aligned}$$

Dinámica de la economía III

- Obteniendo la expresión $\frac{\dot{K}_t}{\Gamma L_t}$:

$$
\begin{aligned}
k_t &= \frac{K_t}{\Gamma L_t} \quad \text{derivando con respecto a t} \\
\frac{\partial k_t}{\partial t} &= \frac{\dot{K}_t(\Gamma_t L_t) - \frac{\partial(\Gamma_t L_t)}{\partial t} K_t}{(\Gamma_t L_t)^2} \\
\dot{k}_t &= \frac{\dot{K}_t}{\Gamma_t L_t} - [\frac{\dot{\Gamma}_t L_t}{\Gamma_t L_t} + \frac{\Gamma_t \dot{L}_t}{\Gamma_t L_t}] \frac{K_t}{\Gamma_t L_t} \\
\dot{k}_t &= \frac{\dot{K}_t}{\Gamma_t L_t} - [\gamma + \eta] k_t \\
\frac{\dot{K}_t}{\Gamma_t L_t} &= \dot{k}_t + [\gamma + \eta] k_t \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Dinámica de la economía IV

- Reemplazando la ecuación [6] en [5] se tiene la **ley de movimiento de la economía**:

Ley de movimiento de la economía

$$\dot{k}_t = sy_t - (\gamma + \eta + \delta)k_t \tag{7}$$

Estado estacionario I

1. **Definición:**

Definición de Estado Estacionario (EE)

El EE es un vector de los valores de las tasas de crecimiento de las principales variables (capital, producto y consumo) en unidades de *trabajo efectivo* que son constantes en el tiempo.

2. **Tasas de crecimiento (unid. trabajo efectivo):**
   - De la ley de movimiento de la economía se obtiene:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = s\frac{y_t}{k_t} - (\gamma + \eta + \delta)$$

Estado estacionario II

- Se deriva la ecuación anterior con respecto al tiempo:

$$\underbrace{\frac{\partial(\frac{\dot{k}_t}{k_t})}{\partial t}}_{=0,\text{ por EE}} = s\frac{y_t}{k_t}(\gamma_{y_t} - \gamma_{k_t})$$

Por tanto en estado estacionario (EE):

$$\gamma_{y_{ss}} = \gamma_{k_{ss}} \tag{8}$$

- En la función de producción:

$$y_t = Ak_t^{\alpha}$$

Se aplica "ln":

$$lny_t = lnA + \alpha lnk_t$$

Derivando:

$$\gamma_{y_t} = \alpha\gamma_{k_t} \tag{9}$$

Estado estacionario III

- Para que la ecuación [8] y [9] sean consistentes, la tasa de crecimiento del capital en estado estacionario debe de ser igual a cero. Por tanto:

$$\gamma_{k_{ss}} = 0 \tag{10}$$

$$\gamma_{y_{ss}} = 0 \tag{11}$$

- Para el consumo:

$$Y_t = C_t + I_t$$

Pero: $I_t = S_t = sY_t$, entonces:

$$C_t = (1-s)Y_t$$

En unidades de trabajo efectivo:

$$\frac{C_t}{\Gamma_t L_t} = (1-s)\frac{Y_t}{\Gamma_t L_t}$$

$$c_t = (1-s)y_t$$

Estado estacionario IV

Aplicanco "ln" y luego derivando:

$$\gamma_{c_t} = \gamma_{y_t}$$

En estado estacionario:

$$\gamma_{c_{ss}} = \gamma_{y_{ss}} = 0$$

Esto se debe a la ecuación [11].

- De igual forma se hace para la inversión:

$$I_t = S_t = sY_t$$

En estado estacionario:

$$\gamma_{i_{ss}} = \gamma_{y_{ss}} = 0$$

3. **Nivel de las variables (unid. trabajo efectivo):**

Estado estacionario V

- **Capital**
  En la ecuación principal del modelo [7]:

$$\dot{k}_t = sy_t - (\gamma + \eta + \delta)k_t$$

En estado estacionario: $\gamma_{k_t} = 0$, por tanto:

$$sy_{ss} = (\gamma + \eta + \delta)k_{ss}$$

Reemplazando: $y_{ss} = Ak_{ss}^{\alpha}$ Se tiene:

Capital de estado estacionario

$$k_{ss} = \left(\frac{\eta + \delta + \gamma}{sA}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} \tag{12}$$

- **Producto**

$$y_{ss} = Ak_{ss}^{\alpha}$$

Estado estacionario VI

- **Inversión**

$$i_{ss} = sy_{ss}$$

- **Consumo**

$$c_{ss} = (1 - s)y_{ss}$$

4. **Tasas de crecimiento a nivel agregado:**
   - **Capital:**

$$k_t = \frac{K_t}{\Gamma_t L_t}$$

Aplicando "ln":

$$lnk_t = lnK_t - ln\Gamma_t - lnL_t$$

Derivando:

$$\gamma_{k_t} = \gamma_{K_t} - \underbrace{\gamma_{\Gamma_t}}_{=\gamma} - \underbrace{\gamma_{L_t}}_{\eta}$$

Estado estacionario VII

En estado estacionario se tiene:

$$\underbrace{\gamma_{k_{ss}}}_{=0} = \gamma_{K_t} - \gamma - \eta$$

Por tanto:

$$\gamma_{K_t} = \gamma + \eta$$

- **Producto y Consumo:**

$y_t = \frac{Y_t}{\Gamma_t L_t}$	$c_t = \frac{C_t}{\Gamma_t L_t}$
$\gamma_{Y_t} = \gamma + \eta$	$\gamma_{C_t} = \gamma + \eta$

Transición al estado estacionario I

¿Que es la transición en el modelo de Solow-Swan?

Es el proceso de despege de una situación inicial , con un stock de capital k_0, hacia el nivel de estado estacionario de una economía.

La ecuación principal del modelo es [7]:

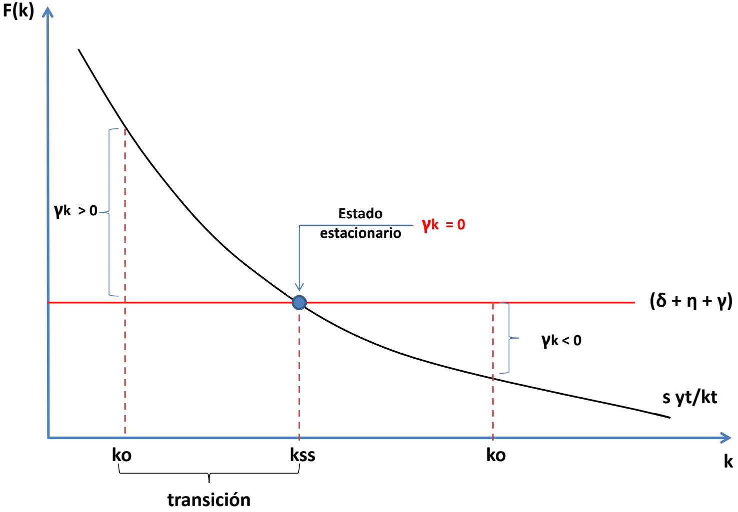
$$\dot{k}_t = sy_t - (\gamma + \eta + \delta)k_t$$

Dividiendo por k_t:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma_{k_t} = s\frac{y_t}{k_t} - (\gamma + \eta + \delta)$$

En el gráfico siguiente se puede observar la dinámica de la tasa de crecimiento del capital.

Transición al estado estacionario II



Ecuación de la transición I

[1] Aproximación lineal de la ecuación [7]

- $\dot{k}_t = g(k_t) = sy_t - (\gamma + \eta + \delta)k_t$
- Aproximación alrededor del EE: 1er orden de Taylor

$$g(k_t) \cong g(k_t)\mid_{k_{ss}} + \dot{g}(k_t)\mid_{k_{ss}} (k_t - k_{ss})$$

- Se obtiene lo siguiente:

$$\dot{k}_t \cong \left[\frac{s\dot{(f)}(k_{ss})}{\eta + \gamma + \delta} - 1 \right] (k_t - k_{ss})(\eta + \gamma + \delta)$$

- Recordar que en EE:

$$\eta + \gamma + \delta = \frac{sf(k_{ss})}{k_{ss}}$$

Ecuación de la transición II

- Finalmente se tiene:

$$\dot{k}_t \cong \left[\frac{k_{ss}\dot{f}(k_{ss})}{f(k_{ss})} - 1\right](k_t - k_{ss})(\eta + \gamma + \delta)$$

Donde bajo una función Cobb Douglas: $\frac{k_{ss}\dot{f}(k_{ss})}{f(k_{ss})} = \alpha$

- Ordenando:

$$\dot{k}_t \cong -\big[(\eta + \gamma + \delta)(1 - \alpha)\big](k_t - k_{ss})$$

$$(k_t \overset{\cdot}{-} k_{ss}) = B(k_t - k_{ss}) \tag{13}$$

[2] Solución de la ecuación diferencial

- En la ecuación [13] se considera que $\dot{z}_t = (k_t \overset{\cdot}{-} k_{ss})$

Ecuación de la transición III

- Resolviendo la ecuación:

$$\dot{z}_t = Bz_t$$
$$z_t = c_0 e^{Bt}$$

  Donde c_0 es una constante

- Evaluando para $t = 0$:

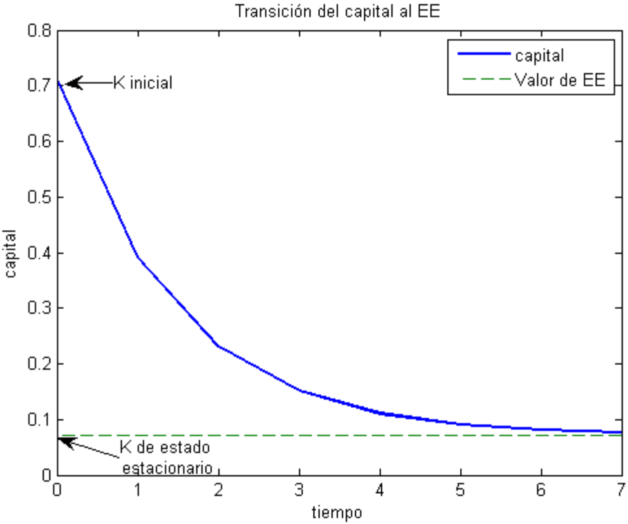
$$c_0 = k_0 - k_{ss}$$

- La solución de la ecuación diferencial (aprox. lineal) es:

$$k_t = (k_0 - k_{ss})e^{Bt} + k_{ss} \tag{14}$$

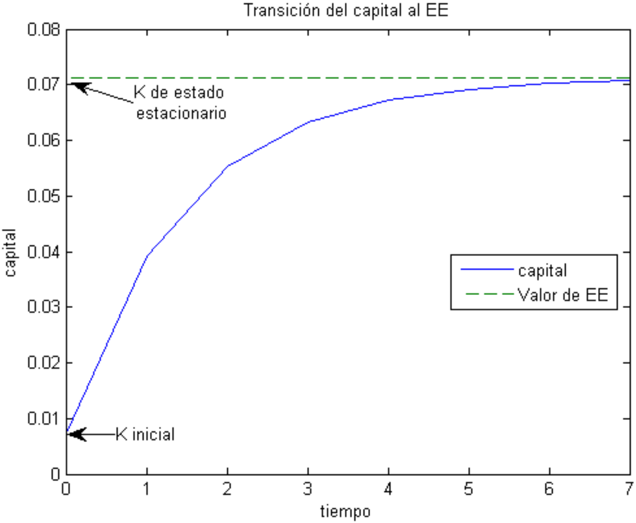
Transición al estado estacionario

Capital inicial mayor que el estado estacionario



Transición al estado estacionario

Capital inicial menor que el estado estacionario

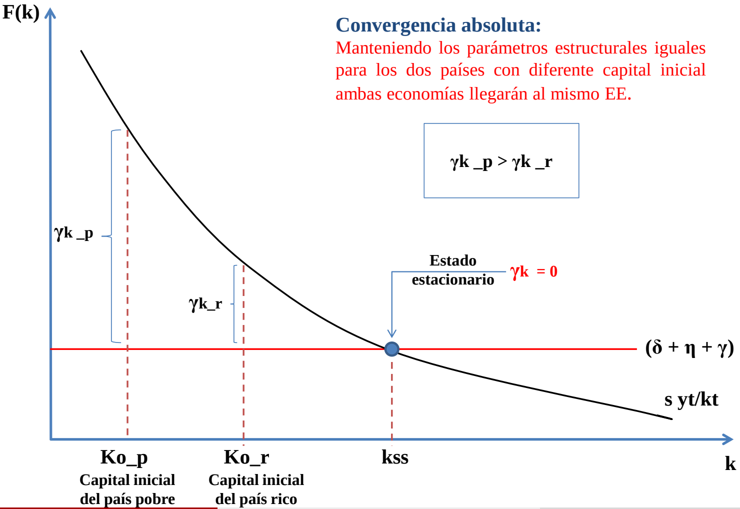


Convergencia

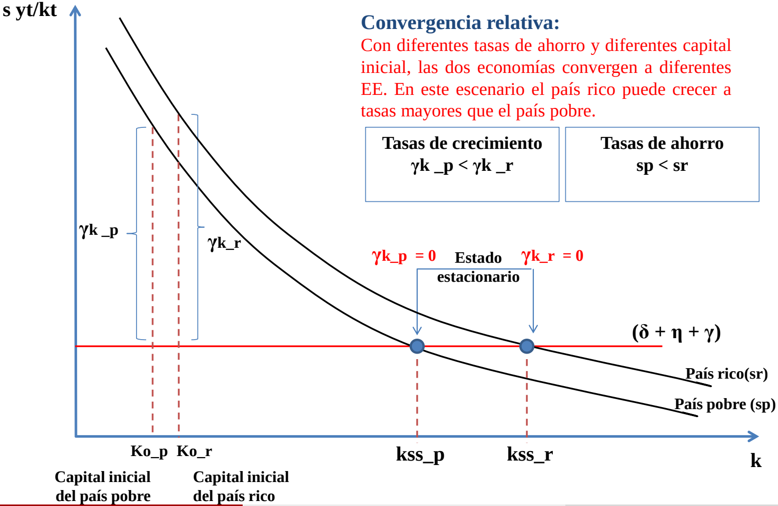
Convergencia absoluta Es la hipótesis que afirma que las economías pobres tienden a crecer per cápita más deprisa que las economías ricas, no condicionada por ninguna otra características de las economías.

Convergencia relativa Esta hipótesis descarta el supuesto de que todas las economías tengan los mismos parámetros, y en consecuencia, la misma posición de estado estacionario.

Convergencia absoluta



Convergencia relativa



Convergencia relativa:
Con diferentes tasas de ahorro y diferentes capital inicial, las dos economías convergen a diferentes EE. En este escenario el país rico puede crecer a tasas mayores que el país pobre.

Tasas de crecimiento $\gamma k\_p < \gamma k\_r$	Tasas de ahorro $sp < sr$

Regla de oro I

- La tasa de ahorro afecta el k_{ss} y el c_{ss}
- Surge una pregunta: ¿Cual es la tasa de ahorro o k_{ss} que maximiza el nivel de c_{ss}?
- Regla de oro de la acumulación del k: es la tasa de ahorro y k_{ss} que hace maximo el nivel de c_{ss}
- El problema:

$$\underset{\{k_{ss}\}}{\text{Max}} \quad c_{ss} = (1-s)f(k_{ss})$$

Dado que:

$$sf(k_{ss}) = (\eta + \delta + \gamma)k_{ss}$$

Se tiene:

$$\underset{\{k_{ss}\}}{\text{Max}} \quad c_{ss} = f(k_{ss}) - (\eta + \delta + \gamma)k_{ss}$$

Regla de oro II

- La solución:

La ecuación del capital de estado estacionario en la regla de oro

$$\dot{f}(k_{ss}) = (\eta + \gamma + \delta)k_{ss}$$

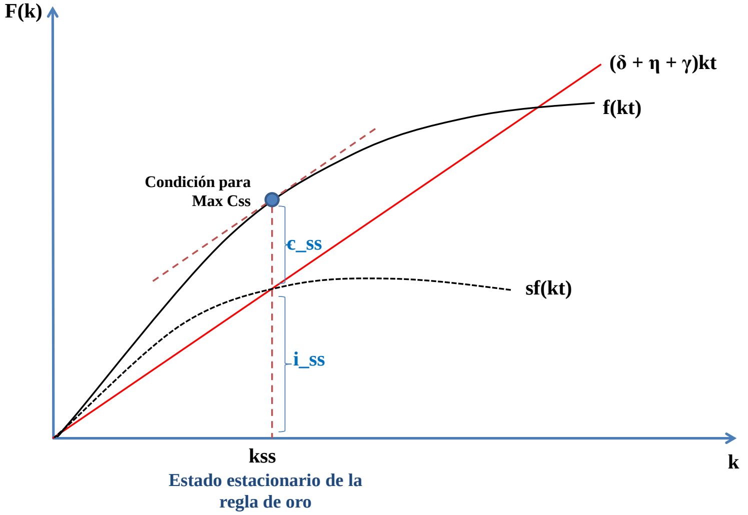
- Por tanto:

$$k_{ss}^{ro} = \left(\frac{\alpha A}{\eta + \gamma + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Se cumple de la ecuación de EE: $sf(k_{ss}) = (\eta + \gamma + \delta)k_{ss}$ que,

$$s^{ro} = \alpha$$

Regla de oro III



Solución exacta I

- De la ecuación principal del modelo:

$$\dot{k}_t = sAk_t^{\alpha} - (\gamma + \eta + \delta)k_t$$

- Haciendo un cambio de variable:

$$z_t = k_t^{1-\alpha}$$

Derivando:

$$\dot{z}_t = 1 - \alpha k_t^{-\alpha}\dot{(k)}_t$$

- Reemplazando y operando en la ecuación principal se tiene:

$$\dot{(z)}_t = az_t + b \tag{15}$$

Donde: $a = -(1-\alpha)(\eta + \gamma + \delta)$ y $b = As(1-\alpha)$

Solución exacta II

- Solución de [15]:
  (**Solución homogénea**)

$$\dot{z}_t = a z_t$$

$$z_t = c_0 e^{at}$$

(**Solución particular**)

$$z_t = -\frac{b}{a}$$

(**Solución total**)

$$z_t = c_0 e^{at} - \frac{b}{a} \tag{16}$$

Solución exacta III

- Hallando "c_0"
  Para $t = 0$ en ecuación [16]:

$$c_0 = z_0 + \frac{b}{a}$$

  Por tanto la ecuación [16] se convierte en:

$$z_t = \left(z_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a} \tag{17}$$

Solución exacta IV

- Haciendo cambio de variable en la ecuación [17]:

$$k_t^{1-\alpha} = \left(k_0^{1-\alpha} + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a} \tag{18}$$

Considerando lo siguiente:

$$\frac{b}{a} = -\frac{As}{\eta + \delta + \gamma} = -k_{ss}^{1-\alpha}$$

Se obtiene:

Capital en función del tiempo

$$k_t^{1-\alpha} = \left(k_0^{1-\alpha} - k_{ss}^{1-\alpha}\right)e^{at} + k_{ss}^{1-\alpha} \tag{19}$$

Cambio de parámetros estructurales I

Pregunta relevante

¿Cuál es el efecto de largo plazo; es decir, el efecto sobre el estado estacionario de las principales variables, de un cambio permanente en los valores de los parámetros estructurales?

1. **Capital**

$$k_{ss} = \left(\frac{sA}{\eta+\delta+\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

s	η	δ	γ	α
$\frac{\partial k_{ss}}{\partial s} = \frac{k_{ss}}{s(1-\alpha)}$	$\frac{\partial k_{ss}}{\partial \eta} = -\frac{k_{ss}}{(1-\alpha)(\eta+\delta+\gamma)}$			$\frac{\partial k_{ss}}{\partial \alpha} = \frac{k_{ss}}{1-\alpha} ln k_{ss}$
$(+)$	(-)	(-)	(-)	$(+)$ si $k_{ss} > 1$ y (-) si $k_{ss} < 1$

2. **Producto**

$$y_{ss} = Ak_{ss}^{\alpha}$$

Cambio de parámetros estructurales II

s	η	δ	γ	α
(+)	(-)	(-)	(-)	$= sign(\frac{\partial k_{ss}}{\partial \alpha})$

3. **Consumo**

$$\begin{aligned} c_{ss} &= (1-s)y_{ss} \\ &= y_{ss} - (\eta+\delta+\gamma)k_{ss} \\ \frac{\partial c_{ss}}{\partial s} &= \frac{\partial y_{ss}}{\partial k_{ss}}\frac{\partial k_{ss}}{\partial s} - (\eta+\delta+\gamma)\frac{\partial k_{ss}}{\partial s} \\ \frac{\partial c_{ss}}{\partial s} &= [\dot{f}(k_{ss}) - (\eta+\delta+\gamma)]\frac{\partial k_{ss}}{\partial s} \end{aligned}$$

Evaluando el signo de $\frac{\partial c_{ss}}{\partial s}$:

- Para la regla de oro: $\dot{f}(k_{ss}) = (\eta+\delta+\gamma)$

Cambio de parámetros estructurales III

- Si $s^{inicial} > s^{oro}$, entonces $\dot{f}(k_{ss}) < (\eta + \delta + \gamma)$ y por tanto:

$$\frac{\partial c_{ss}}{\partial s} < 0$$

- Si $s^{inicial} < s^{oro}$, entonces $\dot{f}(k_{ss}) > (\eta + \delta + \gamma)$ y por tanto:

$$\frac{\partial c_{ss}}{\partial s} > 0$$

- Finalmente:

η	δ	γ	α
(-)	(-)	(-)	$= sign\left(\frac{\partial k_{ss}}{\partial \alpha}\right)$