Clase 3: Aplicaciones de programación dinámica

Matemática avanzada para macroeconomía

Hamilton Galindo

Junio - Agosto
2015

Contenido

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano I
Preliminares

1. Este modelo sostiene que existe un *trade off* entre el tiempo que se dedica a trabajar (n_t) y a capacitarse (acumular capital humano (h_t)). Mientras más tiempo se dedique a trabajar, menor tiempo será orientado a la capacitacion: "para acumular capital humano hay que dedicar tiempo a estudiar/capacitarse, lo que implica dejar de trabajar un poco".

$$\uparrow n_t \rightarrow \downarrow h_t$$

2. La dinámica descrita se captura por medio de esta expresión:

Dinámica de la evolución del capital humano

$$h_{t+1} = h_t \Psi(n_t) \tag{1}$$

Donde: $\Psi(n_t)$ es una función de $[0, 1]$ en R_+

$$\Psi(n_t) : [0, 1] \rightarrow R_+$$

Además, se asume que $\Psi(n_t)$ cumple con las siguientes propiedades:

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano II
Preliminares

- Continua
- Estrictamente cóncava
- Estrictamente decreciente
- $\Psi(0) = 1 + \lambda$, lo que indica que si el agente representativo dedica todo su tiempo a capacitarse, entonces la acumulación del capital humano crecerá a una tasa constante (λ):

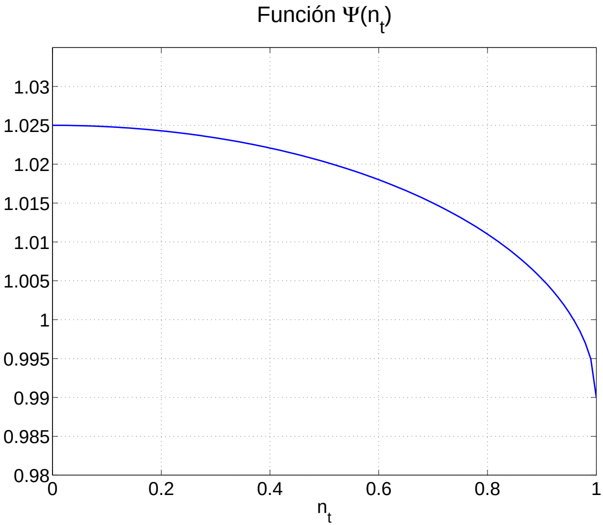
$$h_{t+1} = h_t(1 + \lambda)$$

- $\Psi(1) = 1 - \delta$, lo que indica que si el agente representativo dedica todo su tiempo a trabajar, entonces la acumulación del capital humano decrecerá a una tasa constante (δ):

$$h_{t+1} = h_t(1 - \delta)$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano III

Preliminares



Modelo de crecimiento con inversión en capital humano
Enunciado

$$\underset{\{c_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{\sigma}}{\sigma} \right]$$

sujeto a:

$$c_t = f(h_t n_t) = (h_t n_t)^{\alpha}$$

$$h_{t+1} = h_t \Psi(n_t)$$

$\Psi(n_t) = (\lambda + \delta)\sqrt{1 - n_t^2} + (1 - \delta)$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 1)$ y h_0 dado.

Se le pide lo siguiente:

1. Plantear el problema secuencial.
2. Encontrar la ecuación de Bellman y plantear el problema funcional.
3. Demostrar que la función valor (V) tiene la forma $Ah_t^{\alpha\sigma}$.
4. Demostrar que la función de política es constante (i.e. encontrar el trabajo óptimo) (n) y la constante A de la función valor, considerando los valores de los parámetros: $\sigma = 0.5$, $\beta = 0.95$, $\lambda = 0.025$, $\delta = 0.01$, $\alpha = 0.8$. En este caso construir un código en Matlab para solucionar el sistema no lineal.

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano I
Solución

[1] Problema secuencial

$$\underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} \right]$$

sujeto a:

$$h_{t+1} = h_t \Psi(n_t)$$

[2] Ecuación de Bellman

$$V(h_t) = \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta V(h_{t+1}) \right\} \tag{2}$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano II
Solución

[3] Problema funcional

Introduciendo la ecuación de la variable de estado en la ecuación de Bellman:

$$V(h_t) = \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta V(h_t \Psi(n_t)) \right\} \tag{3}$$

sujeto:

$$0 \leq n_t \leq 1$$

[4] Iteración de la función valor

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano III
Solución

1. Para resolver el PF utilizaremos el método de iteración de la función valor (propuesto por el teorema del punto fijo para contracciones):

$$V_n = T[V_{n-1}], \quad n \geq 1 \tag{4}$$

   Se inicia con la función más sencilla: $V_0 = 0$

2. Encontrando V_1

$$\begin{aligned} V_1 &= \underset{\downarrow}{T[V_0]} \\ &= \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta \underbrace{V_0(h_t \Psi(n_t))}_{=0} \right\} \\ &= \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} \right\} \end{aligned} \tag{5}$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano IV

Solución

(a) En esta etapa se aplica la condición de primer orden:

$$\frac{\partial \text{ función objetivo}}{\partial n_t} = 0$$

No obstante, en este caso, la función objetivo toma su valor máximo cuando $n_t = 1$ (ver la restricción del PF).

(b) Reemplazando n_t que maximiza la función objetivo en [5] se obtiene $T[V_0]$ y por ende V_1:

$$\begin{aligned} V_1 &= T[V_0] = \frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} \\ V_1 &= \frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} \end{aligned} \tag{6}$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano V

Solución

3. Encontrando V_2

$$\begin{aligned}
V_2 &= T[V_1] \\
&\quad \downarrow \\
&= \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta \underbrace{V_1(h_t \Psi(n_t))}_{=\frac{[h_t \Psi(n_t)]^{\alpha\sigma}}{\sigma}} \right\} \\
&= \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta \frac{[h_t \Psi(n_t)]^{\alpha\sigma}}{\sigma} \right\} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano VI
Solución

(a) En esta etapa se aplica la condición de primer orden:

$$\frac{\partial \text{ función objetivo}}{\partial c_t} = 0$$

No obstante, se puede ver que la máximización de la función objetivo no depende de h_t. Lo cual indica que al derivar dicha función objetivo con respecto a la variable de control (n_t), esta solo dependerá de los parámetros del modelo (valores constantes), y por ende $n_t = \text{constante}$. Por tanto, en la función valor se podría considerar como una constante A.

Factorizando $\left\{\frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\}$

$$V_2 = \left\{\frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\} \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \underbrace{[n_t]^{\alpha\sigma} + \beta[\Psi(n_t)]^{\alpha\sigma}}_{\text{No depende de} h_t} \right\} \tag{8}$$

Del CPO se obtendrá:

$$n_t = \text{constante en función de los parámetros} = n \tag{9}$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano VII
Solución

(b) Reemplazando $n_t = n$ que maximiza la función objetivo en [7] se obtiene $T[V_1]$ y por ende V_2:

$$\begin{aligned} V_2 &= T[V_1] = A(n)\left\{\frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\} \\ V_2 &= A(n)\left\{\frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\} \qquad (10) \end{aligned}$$

Donde: $A(n)$ es una constante, la cual llamamos solamente A.

4. Podemos generalizar la ecuación anterior:

$$V(h_t) = A\left\{\frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\} \qquad (11)$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano VIII
Solución

La constante "A" la podemos encontrar reemplazando "V" y la dinámica óptima en la ecuación de Bellman.

[5] Encontrando la función de política

Reemplazando la función de valor (V) en la ecuación de Bellman:

$$\begin{aligned} V(h_t) &= \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta \underbrace{V(h_t \Psi(n_t))}_{=A\frac{[h_t\Psi(n_t)]^{\alpha\sigma}}{\sigma}} \right\} \\ &= \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ \frac{[h_t n_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta A \frac{[h_t \Psi(n_t)]^{\alpha\sigma}}{\sigma} \right\} \end{aligned} \tag{12}$$

Factorizando $\left\{ \frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} \right\}$:

$$V(h_t) = \left\{ \frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} \right\} \underset{\{n_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \left\{ [n_t]^{\alpha\sigma} + \beta A [\Psi(n_t)]^{\alpha\sigma} \right\} \tag{13}$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano IX
Solución

Aplicando CPO (derivada con respecto a la variable de control) se tiene:

$$n_t^{\alpha\sigma-1} = -\beta A(\Psi(n_t))^{\alpha\sigma-1}\dot{\Psi}(n_t) \tag{14}$$

La solución de esta ecuación no lineal es:

$$n_t = n^*$$

La función de política es una constante; es decir, no interesa cual sea el nivel de capital humano (h_t), el agente siempre escoge trabajar n^*. Para conocer el valor de n^* tenemos que encontrar la constante A y definir la función $Psi(n_t)$.

[6] Encontrando la constante A

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano X
Solución

Reemplazando la función valor y la función de política en la ecuación de Bellman se tiene:

$$A\frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma} = \left\{\frac{[h_t]^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\}\left\{[n^*]^{\alpha\sigma} + \beta A[\Psi(n^*)]^{\alpha\sigma}\right\}$$

Por tanto:

$$A = [n^*]^{\alpha\sigma} + \beta A[\Psi(n^*)]^{\alpha\sigma} \tag{15}$$

Entonces:

$$A = A(n^*)$$

Las ecuaciones [14] y [15] forman un sistema de ecuaciones no lineal en (n^*, A):

$$\begin{aligned} {n^*}^{\alpha\sigma-1} &= -\beta A(\Psi(n^*))^{\alpha\sigma-1}\dot{\Psi}(n^*) \quad (16)\\ A &= [n^*]^{\alpha\sigma} + \beta A[\Psi(n^*)]^{\alpha\sigma} \quad (17) \end{aligned}$$

Modelo de crecimiento con inversión en capital humano XI
Solución

Donde:

$$\Psi(n_t) = (\lambda + \delta)\sqrt{1 - n_t^2} + (1 - \delta)$$

¿Cómo resolvemos sistema de ecuaciones no lineales en Matlab?

Función fsolve

Solución de sistemas de ecuaciones no lineales
Matlab

Función "fsolve"

Esta función resuelve sistemas de ecuaciones no lineales; es decir, encuentra las raices del sistema. Para ello el sistema tiene que ser especificado como:

$$F(x) = 0$$

El objetivo es encontrar el valor del vector x que hace que $F(x)$ sea igual a cero. La sintaxis:

$$x = fsolve(fun, x0)$$

Donde: "fun" es una función que contiene al sistema de ecuaciones no lineal ($F(x)$) y $x0$ es el valor inicial para el vector x.

Solución de sistemas de ecuaciones no lineales I
Un ejemplo

Sea el siguiente sistema de ecuaciones no lineal:

Ejemplo

$$y = x^2 - 5 \tag{18}$$
$$y = 3x + 7 \tag{19}$$

El sistema lo podemos re-escribir como:

$$F_1 = y - x^2 + 5 = 0 \tag{20}$$
$$F_2 = y - 3x - 7 = 0 \tag{21}$$

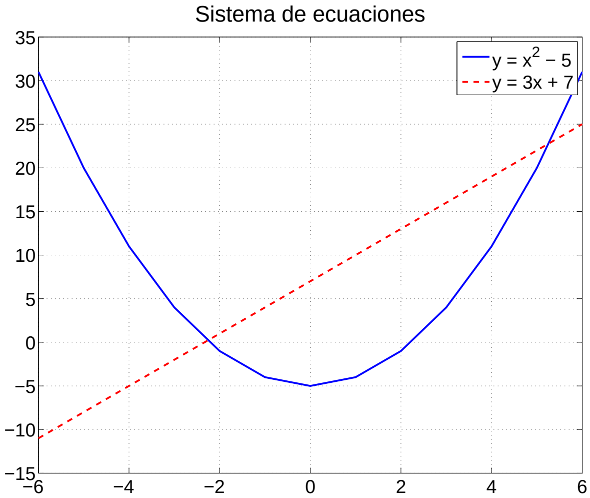
Entonces:

$$F(x) = [F_1, F_2]$$

Asumiendo que: $z = [z(1), z(2)] = [x, y]$, esribimos una función en Matlab que capture el sistema no lineal (ver ejemplo_funcion.m y sol_ejemplo_funcion.m).

Solución de sistemas de ecuaciones no lineales II

Un ejemplo



Solución de sistemas de ecuaciones no lineales
Matlab

Ver la función “sistema_na.m”

Modelo de Hercowitz y Sampson (1991) I
Enunciado

Considere el modelo básico de crecimiento con:

$$\begin{aligned} u(c_t, l_t) &= ln(c_t - a n_t^{\gamma}) \\ y_t &= {k_t}^{\alpha} {n_t}^{1-\alpha} \\ k_{t+1} &= k_t \left(\frac{i_t}{k_t} \right)^{1-\delta} = {k_t}^{\delta} {i_t}^{1-\delta} \end{aligned}$$

Considerando que: $a > 0$ y $\gamma > 1$
Se le pide lo siguiente:

1. Plantear el PS, la ecuación de Bellman y el PF.
2. Demostrar que la función valor tiene la siguiente forma:

$$V(k_t) = D_0 + D_1 ln k_t$$

Donde D_i son constantes.

Modelo de Hercowitz y Sampson (1991) II
Enunciado

3. Demostrar que la función de política tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c_t &= \Pi_1 k_t^{\Psi_1} \\ n_t &= \Pi_2 k_t^{\Psi_2} \end{aligned}$$

   Donde: $\Psi_2 = \frac{\alpha}{-1+\gamma+\alpha}$

4. Demostrar que la dinámica óptima del capital es:

$$k_{t+1} = \Pi_3 k_t^{\Psi_3}$$

   Donde: Π_i son constantes.