# Clase 1: Fundamentos de programación dinámica

*Matemática avanzada para macroeconomía*

Hamilton Galindo

II Semestre
2015

## Contenido

# ¿Qué tipo de problema queremos resolver? I

Queremos resolver un problema de "*optimización dinámica*", al cual llamaremos Problema Secuencial (PS):

**Problema secuencial (PS)**

$$\sup_{\{u_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} s.a &\quad : \\ x_{t+1} &= g(x_t, u_t) \\ u_t &\in \Gamma(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \\ x_0 &\in X \quad \text{dado} \end{aligned}$$

**Donde:**

1. $\mathbf{r(x_t, u_t)}$ : función de retorno (instantáneo)

$$r(x_t, u_t) : X x \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

## ¿Qué tipo de problema queremos resolver? II

2. $\beta$ : factor de descuento, $\beta \in [0, \infty)$
3. $\mathbf{x_t}$ : vector de variables de estado $(x_t \in \mathbb{R}^n)$
4. $\mathbf{u_t}$ : vector de variables de control $(u_t \in \mathbb{R}^m)$
5. $\mathbf{g(x_t, u_t)}$ : función que describe la evolución de la variables de estado (función de transición o ley de movimiento):

$$g(x_t, u_t) : X x \mathbb{R}^m \rightarrow X$$

6. $\mathbf{\Gamma(x_t)}$ : es una **correspondencia** que describe las posibilidades de la variable de control cuando la economía se encuentra en el estado "$x_t$".

$$\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^m$$

7. $\mathbf{X}$ : es el espacio de los valores que puede tomar la variable de estado $(X \subset \mathbb{R}^n)$
8. $\mathbf{x_0}$ : el valor inicial de la variable de estado (estado inicial)

## Ejemplo: crecimiento óptimo (Brock y Mirman, 1972) I

El modelo básico de crecimiento está descrito por el siguiente problema (en términos generales):

$$\underset{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

s.a:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

$$c_t + i_t = f(k_t)$$

$$c_t, k_t \geq 0 \forall t$$

A este problema lo llamamos problema secuencial (PS). Considerando las siguientes forma funcionales $\left(u(c_t) \ln c_t,\ f(k_t) = k_t^{\alpha}\ \right)$, y supuestos $\left(\alpha \in (0,1),\ \delta = 1 \text{ y } k_0 \text{ dado}\ \right)$ se tiene:

# Ejemplo: crecimiento óptimo (Brock y Mirman, 1972) II

## Problema secuencial: Brock y Mirman (1972)

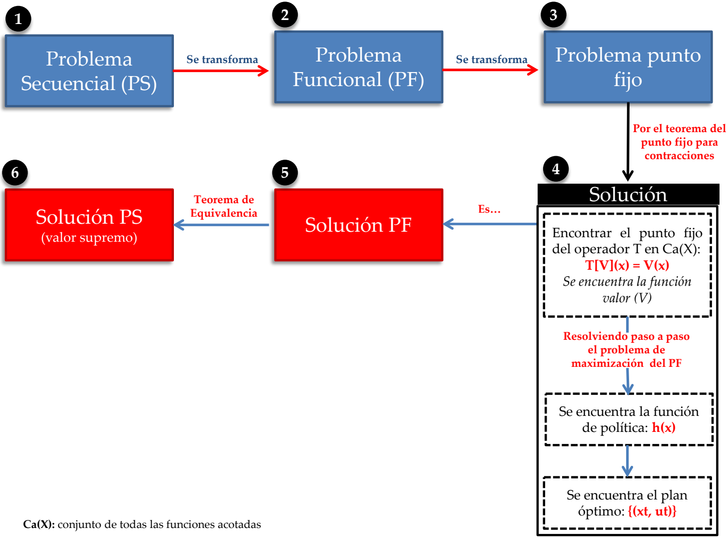
$$\underset{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

s.a:

$$k_{t+1} = k_t^{\alpha} - c_t$$

$$c_t, k_t \geq 0$$

# Proceso de transformación del PS al PF




**Ca(X):** conjunto de todas las funciones acotadas

# Principales hipótesis, proposiciones y teoremas

| | | Hipótesis | Proposiciones | Teoremas |
|---|---|---|---|---|
| PS | Función objetivo | H1 al H3 | **P1:** $\tilde{v}$ resuelve el PF<br>**P2:** $\tilde{v}$ resuelve el PS<br>**P3:** din. fac. en el PF<br>**P4:** din. fac. en el PS | **T1** (teorema de equivalencia)<br>*Principio de optimalidad* |
| | Supremo | H4 y H5 | | **T2** (punto fijo para contracciones) |
| PF | Monotonicidad | H4 al H7 | **P5:** función valor estrictamente monótona | |
| | Concavidad | H4, H5 y H7 al H10 | **P6:** función valor estrictamente cóncava | |
| | Diferenciabilidad | H4, H5 y H7 al H12 | | **T3** (teorema de diferenciabilidad de la función valor)<br>*Teorema de Benveniste-Scheinkman* |

3 propiedades de la función valor

# Teorema del punto fijo: ¿Qué conceptos matemáticos necesitamos? I

## Teorema del punto fijo para contracciones (de Banach)

Sea $C_a(X)$ el conjunto de funciones continuas y acotadas con la norma del supremo $\|\cdot\|$ (*espacio vectorial normado y completo*), **entonces** el operador "**T**" definido en $C_a(X)$ es una aplicación de este espacio en sí mismo, T: $C_a(X) \rightarrow C_a(X)$ , definido como:

$$T[V](x) = sup\left\{ r(x_t, u_t) + \beta V(g(x_t, u_t)) \right\} \tag{2}$$

sujeto a: $u_t \in \Gamma(x_t)$, **Satisface:**

1. ...
2. "T" tiene un único punto fijo "V": $T[V] = V$
3. ...

(para un detalle completo del teorema ver la clase 2.)

# Teorema del punto fijo: ¿Qué conceptos matemáticos necesitamos? II

El teorema de punto fijo para contracciones es uno de los principales en programación dinámica. Este teorema contiene tres grandes conceptos:

1. Un espacio de funciones: $C_a(X)$
   - ¿Espacio vectorial?
   - ¿Espacio normado?
   - ¿Espacio completo?
2. Contracción: $T[V]$
   - ¿Qué es?
   - ¿Existen algunas condiciones suficientes para que un operador sea considerado "contracción"?
3. Punto fijo (de una contracción)
   - ¿Qué es?
   - ¿Existen algunas condiciones para que una contracción tenga un "punto fijo"?

# Espacio vectorial I

## Espacio vectorial (espacio lineal)

Un espacio vectorial (real) "$X$" es un conjunto de elementos (vectores) con dos operaciones:

1. Adición: para cualquier dos vectores $x, y \in X$, la adición brinda un vector "$x + y$" $\in X$
2. Multiplicación escalar: para cualquier vector $x \in X$ y cualquier número real $\alpha \in \mathbf{R}$, la multiplicación escalar brinda un vector "$\alpha x$" $\in X$

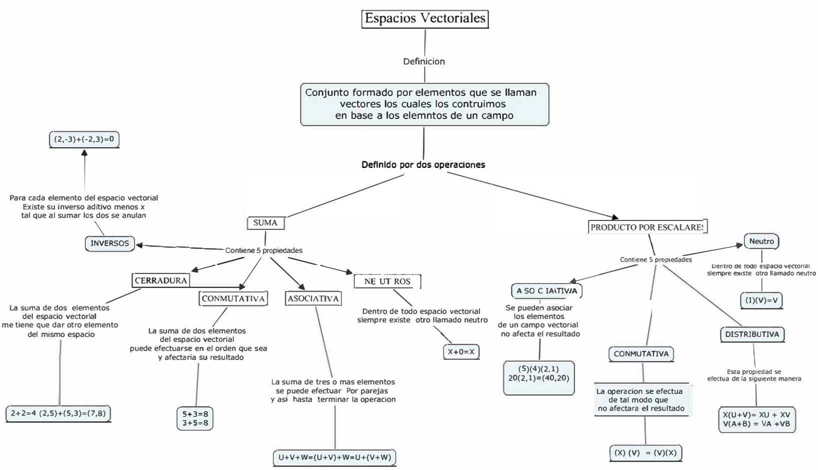
Además, dichas operaciones obedecen las leyes usuales del álgebra; es decir, para todo $x, y, z \in X$, y $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

# Espacio vectorial II

- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
  Además, existe un vector "0" $\in X$ que tiene las siguientes propiedades:
- $x + 0 = x$
- $0x = 0$
  Finalmente,
- $1x = 1$

# Espacio vectorial: panorama gráfico



## Espacio vectorial: Ejemplo 1

### El plano cartesiano $R^2$

El plano cartesiano $R^2$ de puntos de la forma $(x, y)$ con $x, y \in R$, es un espacio vectorial real respecto de las siguientes operaciones:

- Adición:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

- Multiplicación escalar:

$$a.(x, y) = (ax, ay)$$

Donde "$a \in R$"

# Espacio vectorial: Ejemplo 2

## Conjunto de funciones

Sea $X$ un conjunto no vacío. El conjunto $R^X$ de todas las funciones de $X$ en $R$ es un espacio vectorial real bajo las siguientes operaciones:

- Adición:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
- Multiplicación escalar:
$$a.f(x) = af(x)$$

$\forall x \in X, \forall a \in R$

- Si $X = R$ entonces se obtiene el espacio de todas las funciones de variable real a valor real.
- Si $X$ es un intervalo abierto, por ejemplo $(a, b)$ o $R$, y $C(X)$ es el conjunto de funciones continuas de $X$ en $R$, entonces $C(X)$ es un espacio vectorial real.

## Espacio vectorial: con estructura adicional

1. Los espacios vectoriales *ad hoc* no ofrecen un marco para analizar si una sucesión de funciones converge a otra función.
2. Además, no está adaptada para hacer frente a series infinitas, ya que la suma solo permite un número finito de términos.
3. Ambos temas son fundamentales en análisis matemático, por ello se requiere nuevas estructuras: espacios métricos y espacios normados.
4. Cabe mencionar que el espacio normado es un espacio vectorial; no obstante, un espacio métrico puede ser o no un espacio vectorial.

# Espacio métrico I

## ¿Qué es una métrica?

Una métrica (o distancia) es una función "$d$", definida como:

$$d : SxS \to \mathbf{R}$$

tal que para todo $x, y, z \in S$ se cumple:

a. $d(x, y) \geq 0$, con igualdad si y solo si $x = y$ (no negatividad)
b. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)
c. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular)

La definición de "métrica" resume las cuatro popiedades básicas de la distancia euclideana:

1. La distancia entre distintos puntos es estrictamente positiva.
2. La distancia de un punto a sí mismo es cero.
3. la distancia es simétrica.
4. La desigualdad triangular se mantiene.

# Espacio métrico II

## ¿Qué es un espacio métrico?

Un espacio métrico es un conjunto "$S$" en la cual se ha definido una métrica "$d$".

**Notación:** a $(S, d)$ se le llama espacio métrico.

# Espacio métrico: Ejemplos

## R como espacio métrico

$R$ es un espacio métrico con una función distancia $d(x, y) = |x - y|$
Entonces: $(R, d)$ es un espacio métrico.

## Espacio de funciones

El conjunto de funciones $C[a, b]$, de las funciones continuas del intervalo cerrado $[a, b]$ en $R$, es un espacio métrico con una función distancia (métrica):

$$d_\infty : C[a, b]xC[a, b] \to R$$

Definida por:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

Entonces: $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico

## ¿Por qué es útil el concepto de espacio métrico?

1. Los espacios métricos tienen cuatro propiedades:
   - Conexidad: si un espacio puede ser separado en dos conjuntos abiertos con intersección vacia, entonces el espacio es no conexo.
   - Separabilidad: relacionada con conjuntos numerables.
   - Compacidad: si un espacio puede ser descrito por un número finito de conjuntos abiertos.
   - Completitud: permite analizar si una sucesión es convergente sin necesidad de conocer su límite.
2. Las dos últimas propiedades (compacidad y completitud) son esenciales para el análisis real y teoría de la optimización.
3. Ademas, en los espacios métricos se puede estudiar:
   - Conjuntos abiertos
   - Conjuntos cerrados
   - Punto interior
   - Entre otros conceptos de conjuntos

# Espacio normado I

## ¿Qué es una norma?

Una norma es una función que brinda la noción de "longitud" de un vector. La norma "$\| \cdot \|$" esta definida como:

$$\| \cdot \| : S \to \mathbf{R}$$

tal que para todo $x, y, z \in S$ y $\alpha \in \mathbf{R}$ se cumple:

- **a.** $\| \cdot \| \geq 0$, con igualdad si y solo si $x = 0$
- **b.** $\|\alpha x\| = \mid \alpha \mid \|x\|$
- **c.** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)

## ¿Qué es un espacio normado?

Un espacio normado es un espacio vectorial "$S$" en la cual se ha definido una norma "$\| \cdot \|$".

**Notación:** a $(S, \| \cdot \|)$ se le llama espacio normado.

# Espacio normado II

- Todo espacio normado $(S, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico con la métrica dada por:
$$d(x, y) = \|x - y\|$$
A esta métrica se le llama métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$.
- Todos los conceptos definidos para espacios métricos aplican a espacios normados.

## Espacio normado: Ejemplos

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\} \tag{3}$$

## Convergencia de una secuencia

### Convergencia de una secuencia

Una secuencia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $S$ converge a $x \in S$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon$ tal que:

$$d(x_n, x) < \epsilon, \text{ para todo } n \geq N_\epsilon \tag{4}$$

Por tanto, una secuencia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio métrico $(S, d)$ converge a $x \in S$ si y solo si la secuencia de distancias $\{d(x_n, x)\}$, una secuencia en $\mathbf{R}_+$, converge a cero. En este caso se escribe:

$$x_n \longrightarrow x \Longleftrightarrow d(x_n, x) \longrightarrow 0$$

# Secuencia de Cauchy

## Secuencia de Cauchy

Una secuencia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $S$ es una secuencia de Cauchy (*satisface el criterio de Cauchy*) si para cada $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon$ tal que:

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \text{ para todo } n, m \geq N_\epsilon \tag{5}$$

- Por tanto, una secuencia es de Cauchy si los puntos son cada vez más cercanos uno del otro.
- Observación: la ventaja del criterio de Cauchy, en comparación con [4], es que [5] puede ser revisado solo conociendo la secuencia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- No obstante, para que el criterio de Cauchy sea útil es necesario trabajar en espacios donde este (el espacio) implique la existencia de un punto límite.
- Entonces: ¿cuando puedo afirmar que una sucesión de Cauchy implica convergencia (de dicha sucesión)?: cuando trabajamos en espacios completos.

# Espacio (métrico) completo I

## Espacio (métrico) completo

Un espacio métrico $(S, d)$ es completo si cada secuencia de Cauchy en $S$ converge a un elemento en $S$.

- En un espacio completo, verificar que una secuencia satisface el criterio de Cauchy es un camino para verificar la existencia de un punto límite en $S$.
- Observación: a un espacio vectorial normado completo se le llama Espacio de Banach.

# Espacio (métrico) completo II

### Teorema 1 (Espacio normado completo)

Sea $X \subseteq R^l$, y sea $C_a(X)$ el conjunto de funciones continuas y acotadas $f : X \to R$ con la norma del supremo, $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, Entonces:

$C_a(X)$ es un espacio vectorial normado completo.

- En este espacio la métrica definida es $d(x, y) = \|x - y\|$, donde $x, y$ son funciones.

# Contracción (aplicación contractiva) I

## ¿Qué es una contracción?

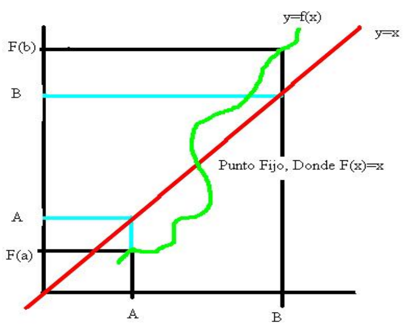
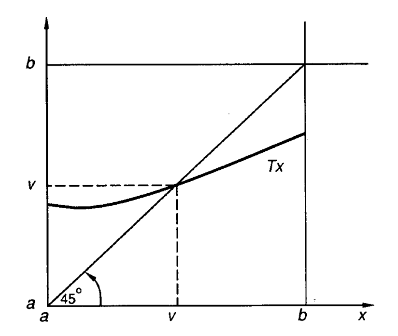
Sea (X, d) un espacio métrico. Una aplicación (función) en sí misma $T : S \to S$ se llama contracción (con módulo $\beta$) si $\forall x, y \in S$, existe algún $\beta \in (0, 1)$ tal que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \beta d(x, y)$$

Es decir, la distancia entre las imagenes de los dos puntos es menor que la distancia entre dichos puntos.

- Una contracción posee al menos un punto fijo.
- El teorema de Banach del punto fijo afirma que toda contracción sobre un espacio métrico completo tiene un único punto fijo, y por tanto para cada $x$ de $S$ la secuencia iterativa $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ converge al punto fijo.
- Toda contracción $T$ en un espacio métrico (S, d) es continua.

# Contracción (aplicación contractiva) II

| No es una aplicación contractiva | Es una aplicación contractiva |
| --- | --- |
|  |  |

# Condiciones de Blackwell

Blackwell brinda condiciones para que un operador $T$ sea considerado contracción.

## Condiciones suficientes de Blackwell para contracciones

Sea $X \subseteq R^l$, y sea $B(X)$ el espacio de funciones acotadas definidas en $X$, $f : X \to R$, con la norma del supremo. Sea $T : B(X) \to B(X)$ un operador que satisface:

1. (monotonicidad) $f, g \in B(X)$ y $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X$, implica:
$$T[f](x) \leq T[g](x), \text{ para todo } x \in X$$
2. (descuento) existe algún $\beta \in (0, 1)$ tal que:
$$T[f + a](x) \leq T[f](x) + \beta a, \text{ para todo } f \in B(X), a \geq 0, x \in X$$

**Donde:** $(f + a)(x)$ es la función definida por $(f + a)(x) = f(x) + a$

Entonces, "T" es una contracción con módulo $\beta$.

# ¿Qué es un punto fijo? I

## ¿Qué es un punto fijo?

Los puntos fijos de $T$ son los elementos de $S$ que satisfacen:

$$T(x) = x$$

Es decir, son las intersecciones con la línea de 45°

- ¿Bajo qué circunstancias podemos asegurar que una contracción tiene un punto fijo?: bajo el teorema de Banach

# Teorema de la aplicación contractiva

## Teorema de la aplicación contractiva

Si $(S, d)$ es un espacio métrico completo y $T : S \to S$ es una aplicación contractiva con módulo $\beta$, **entonces:**

**a.** $T$ tiene solo un punto fijo $v \in S$

**b.** Para cualquier $v_0 \in S$, $\quad d(T^n v_0, v) \leq \beta^n d(v_0, v)$, $n = 0, 1, 2...$

Este teorema sugiere dos temas importantes:

- Que para asegurar que el operador $T$ tenga un único punto fijo se requiere dos cosas: [1] Que el espacio de trabajo (conjunto de funciones) sea un espacio métrico completo; y [2] $T$ sea una contracción.
- Que vamos a converger a dicho punto fijo independientemente de donde empezemos a iterar el operador. Este se deduce de la expresión "para cualquier $v_0 \in S$" en el item "b".