Capitulo 5
Modelo RBC con trabajo variable*

Hamilton Galindo
Arizona State University (ASU)
hamilton.galindo@asu.edu

Alexis Montecinos
Massachusetts Institute of Technology (MIT)
alexis.montecinos@sloan.mit.edu

Borrador: 8 de julio de 2017

Índice

*Disclaimer: cualquier error u omisión es responsabilidad de los autores.

1. Introducción

Este capítulo tiene dos objetivos. El primero es extender el modelo del capítulo 4 al considerar que el trabajo es variable. Esta extensión permite entender el rol que juega el mercado de trabajo en los ciclos económicos. El segundo objetivo es comparar el desempeño del modelo de Long y Plosser (1983), desarrollado en el capítulo 3, con los dos modelos de Campbell (1994): el modelo con trabajo fijo, desarrollado en el capítulo 4 y el modelo con trabajo variable, desarrollado en este capítulo. Una ventaja del modelo de este capítulo es que bajo el supuesto de elasticidad de sustitución del trabajo igual a uno y depreciación total, se puede obtener el modelo de Long y Plosser (1983); es decir, este último modelo es un caso particular de un modelo más general descrito en este capítulo.

Con estos objetivos en mente, este capítulo tienedos secciones importantes. En la primera sección se describe los elementos del modelo; es decir, se describe el comportamiento de las familias, las empresas, el equilibrio de mercado y el choque de productividad como también se especifica el sistema de ecuaciones que resume el modelo. Además, se asigna los valores a los parámetros (calibración), se calcula el estado estacionario y se log-linealiza el sistema de ecuaciones. Finalmente, se resuelve dicho sistema por el método de coeficientes indeterminados, el cual fue explicado en el capítulo 4.

En la segunda sección se analiza la solución del modelo. Este análisis comprende la sensibilidad de los coeficientes de la solución ante distintos valores de los parámetros profundos del modelo. La idea detrás de este análisis es evaluar como responde la solución del modelo cuando los parámetros cambian. Una conclusión de este análisis es, por ejemplo, que los coeficientes de la solución asociados al stock de capital no es sensible al parámetro de persistencia del choque ϕ. Además, en esta sección se calcula la función impulso-respuesta ante un choque de productividad. Finalmente, se realizan dos análisis: el primero evalúa la necesidad que el choque de productividad sea significativo para que el modelo RBC tenga la capacidad de replicar los datos. El segundo evalúa la importancia de la elasticidad de la oferta de trabajo en mejorar la capacidad del modelo en replicar los datos.

2. Elementos del modelo

2.1. Construcción del modelo

2.1.1. Familias

En este modelo se asume que la economía está poblada por un conjunto de familias idénticas que tienen vida infinita. Estas familias obtienen bienestar del consumo de bienes (c_t) y de las horas de ocio (l_t). Estas preferencias se reflejan en la siguiente función de utilidad:

$$u(c_t, h_t) = ln(c_t) + \theta \frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n}$$

Donde θ representa la valoración que el consumidor brinda al ocio en su función de utilidad, y γ_n representa la inversa de la elasticidad de sustitución del trabajo y también representa, como se verá más adelante, la inversa de la elasticidad de la oferta de trabajo (elasticidad de Frisch). Además, la dotación de horas totales que dispone la familia se normaliza a uno, de tal forma que la distribución del tiempo cumple con la siguiente restricción:

$$l_t + h_t = 1$$

Donde h_t son horas destinadas al trabajo y l_t son horas destinadas al ocio. Dado que las familias tienen expectativas racionales y son optimizadoras, entonces estas maximizan su función de utilidad esperada descontada representada por:

$$\underset{\{c_t, h_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ln(c_t) + \theta \frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \right] \tag{1}$$

Las familias deben de elegir la senda temporal óptima de c_t, h_t y k_{t+1}. De otro lado, la restricción presupuestaria de la familia está definida por la siguiente expresión:

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t \tag{2}$$

Donde:

- i_t es la inversión, con cual la familia acumula stock de bienes de capital que a su vez alquila a las empresas.
- w_t representa el salario real.
- r_t es la tasa de alquiler del capital que pagan las empresas.

Además, se supone que las familias son dueñas de los bienes de capital en la economía, por lo cual deben de invertir (i_t) para ofrecer capital en "t+1". La ecuación de movimiento del capital es:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{3}$$

Problema de optimización de la familia
El problema de optimización de la familia se resume en la ecuación (1) sujeto a la restricción presupuestaria, ecuación (2), y a la ley de movimiento del capital, ecuación(3):

$$\underset{\{c_t,h_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ln(c_t) + \theta \frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \right]$$
$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t$$
$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Función de Lagrange y condiciones de primer orden
Al observar las dos restricciones se puede concluir que ambas podrían convertirse en una sola restricción. Para ello se despeja la inversión i_t de la ecuación de movimiento del capital y se reemplaza en la restricción presupuestaria. De esta forma se obtiene la siguiente única restricción:

$$c_t + k_{t+1} = w_t h_t + (r_t + (1-\delta))k_t \tag{4}$$

Dada esta única restricción y la función objetivo, entonces la función de Lagrange estaría definida por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L} = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big[u(c_t, h_t) + \lambda_t (w_t h_t + r_t k_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) \big] \right\}$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{c_t} + \lambda_t(-1) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow \frac{-\theta}{(1-h_t)^{\gamma_n}} + \lambda_t(w_t) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \Longrightarrow E_t \big[\lambda_t(-1) + \beta \lambda_{t+1}(r_{t+1} + (1-\delta)) \big] = 0 \tag{7}$$

Condición Intratemporal: es representada por la oferta de trabajo, la cual se obtiene de la ecuación (5) y (6):

$$\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t} \tag{8}$$

Condición Intertemporal: es representada por la ecuación de Euler, la cual indica la senda óptima del consumo. Esta se obtiene de (5) y (7):

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [r_{t+1} + (1-\delta)] \right] \tag{9}$$

La ecuación (8) y (9) representan las dos principales ecuaciones de comportamiento de las familias. Una de estas ecuaciones es la oferta de trabajo, la cual está influenciada por el parámetro γ_n. La inversa de este parámetro es conocido en la literatura como la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo, la cual se detalla a continuación.

Elasticidad Frisch de la Oferta de Trabajo (EFOT): es el cambio porcentual en la oferta de trabajo ante un cambio porcentual en el salario real manteniendo la utilidad marginal del consumo constante. Además, la EFOT mide el *efecto sustitución* que un cambio en el salario real genera en la oferta laboral. Es decir no considera el *efecto ingreso* que se deriva de la sustitución intratemporal entre el consumo/ocio. El cálculo de la EFOT tiene tres pasos, los cuales se describen a continuación:

Paso 1: se calcula la diferenciación total de la oferta de trabajo (8) del cual se obtiene la ecuación (10):

$$
\begin{aligned}
\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} &= \frac{w_t}{c_t} \\
\text{Aplicando} &: \text{Diferenciación total} \\
\theta(-\gamma_n)(1-h_t)^{-\gamma_n-1}(-\Delta h_t) &= \frac{c_t\Delta w_t - w_t\Delta c_t}{c_t^2} \\
\text{Ordenando los términos} &: \\
\theta(1-h_t)^{-\gamma_n}\frac{\gamma_n}{(1-h_t)}\Delta h_t &= \frac{\Delta w_t}{c_t} - \frac{w_t}{c_t}\frac{\Delta c_t}{c_t} \\
\text{Por la oferta de trabajo} &: \theta(1-h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t} \\
\frac{w_t}{c_t}\frac{\gamma_n}{(1-h_t)}\Delta h_t &= \frac{\Delta w_t}{c_t} - \frac{w_t}{c_t}\frac{\Delta c_t}{c_t} \\
\gamma_n\frac{\Delta h_t}{(1-h_t)} &= \frac{\frac{\Delta w_t}{c_t} - \frac{w_t}{c_t}\frac{\Delta c_t}{c_t}}{\frac{w_t}{c_t}} \\
\gamma_n\frac{\Delta h_t}{(1-h_t)} &= \frac{\Delta w_t}{w_t} - \frac{\Delta c_t}{c_t} \\
\gamma_n\frac{h_t}{h_t}\frac{\Delta h_t}{(1-h_t)} &= \frac{\Delta w_t}{w_t}[1 - \frac{\Delta c_t/c_t}{\Delta w_t/w_t}] \\
\gamma_n\frac{h_t}{1-h_t}\frac{\Delta h_t}{h_t} &= \frac{\Delta w_t}{w_t}[1 - \frac{\Delta c_t/c_t}{\Delta w_t/w_t}] \\
\frac{\Delta h_t/h_t}{\Delta w_t/w_t} &= \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{1-h_t}{h_t}\right][1 - \frac{\Delta c_t/c_t}{\Delta w_t/w_t}] \\
e_t^{hw} &= \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{1-h_t}{h_t}\right][1 - e_t^{cw}]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Donde, e_t^{hw} representa la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real $(\frac{\Delta h_t/h_t}{\Delta w_t/w_t})$; de otro lado, e_t^{cw} es la elasticidad del consumo con respecto al salario real $(\frac{\Delta c_t/c_t}{\Delta w_t/w_t})$.

Paso 2: según la definición del la "Elasticidad de Frisch", la utilidad marginal del consumo se mantiene constante, lo cual indica un nivel de consumo fijo invariante ante cambios en el salario real, por lo cual la e_t^{cw} seria igual a cero.

Paso 3: finalmente la EFOT queda representada por la siguiente expresión:

$$
e_t^{hw} = \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{1-h_t}{h_t}\right] \tag{11}
$$

Por tanto, la EFOT (e_t^{hw}) depende de manera inversa del γ_n. Por esta razón se considera que γ_n es la inversa de la elasticidad de Frisch (EFOT).

En el modelo RBC, una mayor elasticidad de Frisch (menor γ_n) amplifica más el choque de productividad. Es decir, la oferta de trabajo más elastica incrementa más el trabajo y por ende el producto en t.

Elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo: la tasa marginal de sustitución ($TMgS_{1,2}$) indica la cantidad del bien 1 que se esta dispuesto a ceder si se incrementa en una unidad el bien 2 manteniendo constante el nivel de utilidad.

$$TMgS_{1,2} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -\frac{UMg_2}{UMg_1}$$

De otro lado, la elasticidad de sustitución ($ES_{1,2}$) mide la facilidad de sustituir un bien con respecto a otro; además, mide la curvatura de la curva de indiferencia y por tanto la sustituibilidad entre bienes.

$$ES_{1,2} = \frac{\partial ln(x_1/x_2)}{\partial ln(TMgS_{1,2})}$$

Asimismo, cabe mencionar que la **elasticidad de sustitución** se observa en dos dimensiones:

Cuadro 1: Elasticidad de sustitución

Intratemporal (c_t, l_t)	**Intertemporal** (c_t, c_{t+1})
$TMgSI_{c_t,l_t} = -\frac{UMg_l}{UMg_c}$	$TMgSI^c_{t+1,t} = -E_t\left[\frac{UMg_{c_t}}{\beta UMg_{c_{t+1}}}\right]$
$ESI_{c_t,l_t} = \frac{\partial ln(c_1/l_t)}{\partial ln(TMgSI_{c_t,l_t})}$	$ESI^c_{t+1,t} = \frac{\partial ln(c_{t+1}/c_t)}{\partial ln(TMgSI^c_{t+1,t})}$

Aplicando el caso intertemporal para la oferta de trabajo se obtiene la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo (h_t, h_{t+1}):

- $TMgSI^h_{t+1,t} = -E_t\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{1-h_t}{1-h_{t+1}}\right)^{-\gamma_n}\right]$
- $ESI^h_{t+1,t} = -\frac{1}{\gamma_n}E_t\left[\frac{1-h_{t+1}}{h_{t+1}}\right]$

Según la expresión de $ESI^h_{t+1,t}$, el parámetro γ_n se puede considerar como la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo. En este escenario la **elasticidad de Frisch** y la $ESI^h_{t+1,t}$ son similares.

2.1.2. Empresas

En este modelo se asume que las empresas se desarrollan en un contexto de competencia perfecta tanto en el mercado de bienes como en el mercado de factores de producción. En este escenario, la empresa representativa maximiza su función de beneficios sujeta a su tecnología (función de producción). Dicho problema de optimización está descrito de la siguiente manera:

$$\underset{\{k_t,h_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \quad \Pi_t = y_t - [w_t h_t + r_t k_t]$$

Sujeto a la función de producción o tecnología disponible:

$$y_t = a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \tag{12}$$

La función de producción se puede reemplazar en la función de beneficios π_t permitiendo que el problema de optimización se redusca a uno sin restricciones:

$$\underset{\{k_t,h_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \quad \Pi_t = a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - [w_t h_t + r_t k_t] \tag{13}$$

Derivando directamente la función objetivo, ecuación (13), con respecto al capital k_t y al trabajo h_t se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_t}{\partial k_t} = 0 \Longrightarrow a_t \alpha k_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} - r_t &= 0 \\
\alpha \frac{a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}}{k_t} &= r_t \\
\text{Demanda del capital} &: \\
\alpha \frac{y_t}{k_t} &= r_t \qquad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_t}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow a_t (1-\alpha) k_t^{\alpha} h_t^{-\alpha} - w_t &= 0 \\
(1-\alpha) \frac{a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}}{h_t} &= w_t \\
\text{Demanda del trabajo} &: \\
(1-\alpha) \frac{y_t}{h_t} &= w_t \qquad (15)
\end{aligned}$$

2.1.3. Equilibrio de mercado y definicion del choque

Para completar el modelo es necesario agregar dos ecuaciones. La primera ecuación hace referencia al equilibrio en el mercado de bienes, la cual está descrito por la siguiente expresión:

$$y_t = c_t + i_t \tag{16}$$

La segunda ecuación describe el comportamiento de la "productividad", que se comporta como un AR(1):

$$ln(a_t) = \phi ln(a_{t-1}) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2) \tag{17}$$

Donde: ϵ es llamado "choque de productividad".

2.1.4. Sistema de ecuaciones principales

El cuadro [2] muestra las ecuaciones que describen el comportamiento óptimo de las familias como de las empresas; asi también indica las ecuaciones de equilibrio de mercado y del comportamiento de la productividad. Todo este conjunto de ecuaciones forman un sistema que representa al modelo RBC con trabajo variable en línea con Campbell (1994).

Cuadro 2: Sistema de ecuaciones no lineales principales

Ecuaciones	**Descripción**
$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [r_{t+1} + (1-\delta)] \right]$	Ecuación de Euler
$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$	Demanda del capital
$\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t}$	Oferta de trabajo
$h_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{w_t}$	Demanda de trabajo
$y_t = a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$	Ley de movimiento del capital
$lna_t = \phi lna_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

2.2. Calibración

Los valores de los parámetros corresponden a la calibración de Campbell (1994) excepto el valor de θ que ha sido tomado de Prescott (1986). El cuadro [3] muestra los valores asociados a los parámetros.

Cuadro 3: Calibración

Parámetro	**Observación**
$\alpha = 0.333$	Proporción del capital en el ingreso nacional
$\gamma_n = 0.25$	Inversa de la elasticidad de Frisch (valor para simular)
$\delta = 0.025$	Corresponde a una depreciación del 10 % anual
$\theta = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} = 2$	ϵ es el tiempo productivo orientado a actividades no-mercado
$\rho = 0.95$	La productividad es estacionaria
$\beta = 0.984$	
$\sigma = 0.01$	Desviación estándar del choque de productividad

2.3. Estado estacionario

Se conoce como equilibrio de largo plazo donde $\Delta x_t = 0$ (para todas las variables del modelo) y que el choque de productividad (ε_t) toma su valor promedio (= 0). Además, dada la ecuación de movimiento de la productividad, su valor de estado estacionario es $a = 1$. Asimismo, las expectativas desaparecen, por ello se le conoce como solución no estocástica. Cabe mencionar que hallar el estado estacionario es un paso previo a la log-linelización. En el cuadro [4] se escribe las ecuaciones principales del modelo en su versión de estado estacionario.

Cuadro 4: Sistema de ecuaciones no lineales principales en estado estacionario

Ecuaciones	Descripción
[1] $r_{ss} = \alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}}$	Demanda del capital
[2] $\frac{1}{c_{ss}} = \beta \left[\frac{1}{c_{ss}} [r_{ss} + (1-\delta)] \right]$	Ecuación de Euler
[3] $\theta(1-h_{ss})^{-\gamma_n} = \frac{w_{ss}}{c_{ss}}$	Oferta de trabajo
[4] $h_{ss} = (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{w_{ss}}$	Demanda de trabajo
[5] $y_{ss} = a_{ss} k_{ss}^{\alpha} h_{ss}^{1-\alpha}$	Función de producción
[6] $y_{ss} = c_{ss} + i_{ss}$	Equilibrio mercado de bienes
[7] $k_{ss} = (1-\delta)k_{ss} + i_{ss}$	Ley de movimiento del capital
[8] $lna_{ss} = \phi lna_{ss} + \epsilon_{\text{valor medio}}$	Choque de productividad

De la *ecuación 8* del cuadro [3] se obtiene que el único valor que resuelve la expresión $lna_{ss} = \phi lna_{ss}$ es $a_{ss} = 1$. Asimismo, de la *ecuación 2* se obtiene la tasa de interés en estado estacionario:

$$r_{ss} = \frac{1}{\beta} - (1-\delta) \tag{18}$$

De la *ecuación 7* se obtiene el ratio inversión/capital en estado estacionario:

$$\frac{i_{ss}}{k_{ss}} = \delta \tag{19}$$

De la *ecuación 1*, que describe la demanda de capital, se obtiene el ratio producto/capital en estado estacionario:

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = \frac{r_{ss}}{\alpha} \tag{20}$$

De la *ecuación 5*, luego de considerar que $a_{ss} = 1$, se obtiene:

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = \left[\frac{h_{ss}}{k_{ss}}\right]^{1-\alpha} \tag{21}$$

Dado que en la ecuación (20) se encontró el valor del ratio y_{ss}/k_{ss}, entonces:

$$\frac{h_{ss}}{k_{ss}} = \left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{22}$$

Los elementos de la *ecuación 6*, que expresa el equilibrio en el mercado de bienes, puede ser dividida por el valor del capital en estado estacionario (k_{ss}):

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = \frac{c_{ss}}{k_{ss}} + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} \tag{23}$$

De la ecuación (19) se sabe que el ratio i_{ss}/k_{ss} es igual a δ. Además, por la ecuación [21] se tiene que el ratio y_{ss}/k_{ss} es igual a $\frac{r_{ss}}{\alpha}$. Bajo estos valores, la ecuación (23) quedaría descrita por:

$$\frac{r_{ss}}{\alpha} = \frac{c_{ss}}{k_{ss}} + \delta \tag{24}$$

Este resultado permite encontrar el ratio c_{ss}/k_{ss}:

$$\frac{c_{ss}}{k_{ss}} = \frac{r_{ss}}{\alpha} - \delta \tag{25}$$

De otro lado, diviendo los dos lados de la ecuación de la demanda de trabajo [ecuación 4] por el valor del capital en estado estacionario se tiene:

$$\frac{h_{ss}}{k_{ss}} = (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{w_{ss}k_{ss}} \tag{26}$$

De esta ecuación se despeja el salario real en estado estacionario w_{ss}:

$$w_{ss} = (1-\alpha)\frac{\frac{y_{ss}}{k_{ss}}}{\frac{h_{ss}}{k_{ss}}} \tag{27}$$

Además, de la ecuación (22) se sabe que el ratio h_{ss}/k_{ss} es una constante y es igual a $\left[\frac{R_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Asimismo, por la ecuación 20 se tiene que el ratio y_{ss}/k_{ss} es igual a $\frac{r_{ss}}{\alpha}$. Estos dos valores permiten obtener el valor del salario real en estado estacionario w_{ss}:

$$\begin{aligned} w_{ss} &= (1-\alpha)\frac{\frac{r_{ss}}{\alpha}}{\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}} \\ w_{ss} &= (1-\alpha)\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{28}$$

Finalmente, en la oferta de trabajo [ecuación 3] se multiplica y divide por k_{ss} al trabajo en estado estacionario (h_{ss}) y al consumo (c_{ss}):

$$\theta(1 - k_{ss}\frac{h_{ss}}{k_{ss}})^{-\gamma_n} = \frac{w_{ss}}{k_{ss}\frac{c_{ss}}{k_{ss}}} \tag{29}$$

De esta expresión, el valor de w_{ss}, $\frac{c_{ss}}{k_{ss}}$ y $\frac{h_{ss}}{k_{ss}}$ son conocidos. Por temas de simplicidad se considera que el ratio $\frac{c_{ss}}{k_{ss}}$ es igual a η_1, y que $\frac{w_{ss}}{\frac{c_{ss}}{k_{ss}}}$ es igual a η_2. Por tanto se tiene:

$$\theta(1 - \eta_1 k_{ss})^{-\gamma_n} = \frac{\eta_2}{k_{ss}} \tag{30}$$

Esta ecuación es no lineal en el capital de estado estacionario (k_{ss}). Si se encuentra el valor del capital que resuelve esta ecuación, entonces se encontrará todos los valores de las variables en estado estacionario, ya que dichas variables dependen del capital. Cabe mencionar que la no linealidad de esta ecuación se debe al parámetro γ_n (inversa de la elasticidad de Frisch). Si el valor de este parámetro es igual a uno, entonces la no linealidad desaparece y el valor de k_{ss} es igual a $\frac{\eta_2}{\theta+\eta_1\eta_2}$. Cabe mencionar que γ_n sea igual a uno significa que el trabajo en la función de utilidad se expresa como el $ln(1-h_t)$.

De manera alternativa, la ecuación (29) se puede expresar de manera no lineal en el trabajo. Esta opción es mejor debido a que se sabe que el valor del trabajo en estado estacionario está entre cero y uno; es decir, $h_{ss} \in [0,1]$. Esto es importante debido a que las técnicas de optimización numérica (aprcximaciones) requieren un punto inicial. Por tanto, la ecuación [29] quedaría de la siguiente manera:

$$\theta(1-h_{ss})^{-\gamma_n} = \frac{w_{ss}}{h_{ss}\frac{k_{ss}}{h_{ss}}\frac{c_{ss}}{k_{ss}}} \tag{31}$$

Simplificando esta expresión, se tiene:

$$\begin{aligned}
\theta(1-h_{ss})^{-\gamma_n} &= \frac{w_{ss}}{h_{ss}\frac{k_{ss}}{h_{ss}}\frac{c_{ss}}{k_{ss}}} \\
\theta\frac{c_{ss}}{k_{ss}}\frac{k_{ss}}{h_{ss}}h_{ss} &= w_{ss}(1-h_{ss})^{\gamma_n} \\
\text{Reordenando los términos} &: \\
\underbrace{\theta\frac{c_{ss}}{k_{ss}}}_{=\gamma_1}h_{ss} &= \underbrace{w_{ss}\frac{h_{ss}}{k_{ss}}}_{\gamma_2}(1-h_{ss})^{\gamma_n} \\
\gamma_1 h_{ss} &= \gamma_2(1-h_{ss})^{\gamma_n} \qquad (32)
\end{aligned}$$

La ecuación (32) puede ser resuelta por métodos numéricos. Para ello se ha construido una función llamada "trabajo_ss.m", la cual resuelve la ecuación (32) y por tanto brinda un valor de h_{ss}. Dado este valor, entonces se puede obtener el valor de estado estacionario de las demás variables. Por ejemplo, de la ecuación (22) se puede obtener el capital k_{ss}:

$$\begin{aligned}
\frac{h_{ss}}{k_{ss}} &= \left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
k_{ss} &= h_{ss}\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{-1}{1-\alpha}} \qquad (33)
\end{aligned}$$

Al tener el valor de k_{ss} entonces de la ecuación (20) se obtiene la producción y_{ss}:

$$\begin{aligned}
\frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{r_{ss}}{\alpha} \\
y_{ss} &= k_{ss}\frac{r_{ss}}{\alpha} \qquad (34)
\end{aligned}$$

De la misma manera al considerar el valor de k_{ss} en la ecuación (19) se obtiene el valor de la inversión en estado estacionario i_{ss}.

$$\begin{aligned}
\frac{i_{ss}}{k_{ss}} &= \delta \\
i_{ss} &= \delta k_{ss} \qquad (35)
\end{aligned}$$

El consumo de estado estacionario c_{ss} se puede obtener de la ecuación (23) debido a que se conoce el producto y la inversión (ambos en estado estacionario).

$$\begin{aligned}
\frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{c_{ss}}{k_{ss}} + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} \\
c_{ss} &= y_{ss} - i_{ss} \qquad (36)
\end{aligned}$$

En el cuadro [5] se indica la expresión del estado estacionario de cada variable del modelo.

Cuadro 5: Estado estacionario

Estado estacionario (forma recursiva)
$r_{ss} = \frac{1}{\beta} - (1-\delta)$
$a_{ss} = 1$
$w_{ss} = (1-\alpha)\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$
$\gamma_1 h_{ss} = \gamma_2 (1-h_{ss})^{\gamma_n}$
$k_{ss} = h_{ss}\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{-1}{1-\alpha}}$
$y_{ss} = k_{ss}\frac{r_{ss}}{\alpha}$
$i_{ss} = \delta k_{ss}$
$c_{ss} = y_{ss} - i_{ss}$

2.4. Log-linealización

De la misma forma que en los capítulos previos, el modelo será log-linealizado siguiendo la técnica de Uhlig (1995). En primer lugar se define la variable $\widehat{x}_t$ como la diferencia entre el logarítmo de la variable "x" y el logarítmo de su estado estacionario "x_{ss}":

$$\widehat{x}_t = lnx_t - lnx_{ss}$$

Esta expresión puede ser reordenada de tal manera que la variable x quede en función de su estado estacionario x_{ss} y de la variable $\widehat{x}_t$:

$$x_t = x_{ss}e^{\widehat{x}_t} \tag{37}$$

Esta expresión de "x_t" se reemplazará en todas las ecuaciones del modelo no lineal. En segundo lugar, la expresión (37) requiere que $e^{\widehat{x}_t}$ sea aproximada por una función lineal. De lo contrario, el sistema de ecuaciones aún mantendría su naturaleza no-lineal. Ante ello, se apróxima $e^{\widehat{x}_t}$ por medio de la expansión de Taylor de primer orden, donde el punto de referencia para la aproximación es el estado estacionario. Al aplicar la expansión de Taylor, $e^{\widehat{x}_t}$ quedaría expresado de la siguiente manera:

$$e^{\widehat{x}_t} \approx 1 + \widehat{x}_t \tag{38}$$

Considerando la propiedad (37) y (38) se procede a log-linealizar el sistema descrito en el cuadro [3]:
Demanda del capital: para encontrar la demanda del capital log-lineal primero se reemplaza cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$, donde $\widehat{x}_t$ es la variable en desviación porcentual del lnx_t con respecto a su estado estacionario (segunda línea). Luego de realizar algunas operaciones algebraicas se llega a la línea 4, en donde se aplica la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1 + x$) obteniendose la línea 5. Finalmente la ecuación (39) es la ecuación log-lineal de la demanda de capital.

$$\begin{aligned}
k_t &= \alpha \frac{y_t}{r_t} && \text{Línea 1} \\
k_{ss} e^{\widehat{k}_t} &= \alpha \frac{y_{ss} e^{\widehat{y}_t}}{r_{ss} e^{\widehat{r}_t}} && \text{Línea 2} \\
e^{\widehat{k}_t} &= \frac{e^{\widehat{y}_t}}{e^{\widehat{r}_t}} && \text{Línea 3} \\
e^{\widehat{k}_t} &= e^{\widehat{y}_t - \widehat{r}_t} && \text{Línea 4} \\
1 + \widehat{k}_t &= 1 + \widehat{y}_t - \widehat{r}_t && \text{Línea 5} \\
\widehat{k}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{r}_t
\end{aligned} \tag{39}$$

Ecuación de Euler: para encontrar la ecuación de Euler log-lineal primero se realiza un cambio de variable ($z_{t+1} = r_{t+1} + (1-\delta)$), la cual se aprecia en la segunda línea de la ecuación (40). Esto se debe a que para simplificar la transformación log-lineal de una ecuación es preferible que todas las variables estén en forma multiplicativa. En segundo lugar, se reemplaza cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$, donde $\widehat{x}_t$ es la variable en desviación porcentual del lnx_t con respecto a su estado estacionario (tercera línea de la ecuación (40). Luego de realizar algunas operaciones algebraicas se llega a la línea 5, en donde se aplica la aproximación de primer orden ($e^{\widehat{x}} \approx 1 + \widehat{x}$) obteniendose la línea 6 y luego de eliminar la constante (número uno) se llega a la línea 7.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_t} &= \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [R_{t+1} + (1-\delta)] \right] \\
\frac{1}{c_t} &= \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [z_{t+1}] \right] \\
\frac{1}{c_{ss} e^{\widehat{c}_t}} &= \beta E_t \left[\frac{1}{c_{ss} e^{\widehat{c}_{t+1}}} [z_{ss} e^{\widehat{z}_{t+1}}] \right] \\
\frac{1}{e^{\widehat{c}_t}} &= E_t \left[\frac{1}{e^{\widehat{c}_{t+1}}} [e^{\widehat{z}_{t+1}}] \right] \\
e^{-\widehat{c}_t} &= E_t \left[e^{\widehat{z}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}} \right] \\
1 - \widehat{c}_t &= E_t [1 + \widehat{z}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}] \\
-\widehat{c}_t &= E_t [\widehat{z}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}]
\end{aligned} \tag{40}$$

Para terminar de caracterizar la ecuación log-lineal de Euler se debe de encontrar $\widehat{z}_{t+1}$ en función de la tasa de interés en log-desviaciones de su estado estacionario ($\widehat{r}_{t+1}$). Para ello primero se debe de considerar dicha relación en estado estacionario:

$$Z_{ss} = r_{ss} + (1-\delta) \underbrace{=}_{\text{por la ecuación (18)}} \frac{1}{\beta} \tag{41}$$

La relación entre $\widehat{z}_{t+1}$ y $\widehat{r}_{t+1}$ se expresa en la ecuación (42):

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= r_{t+1} + (1-\delta) \\ Z_{ss}e^{\widehat{z}_{t+1}} &= r_{ss}e^{\widehat{r}_{t+1}} + (1-\delta) \\ Z_{ss}(1+\widehat{z}_{t+1}) &= r_{ss}(1+\widehat{r}_{t+1}) + (1-\delta) \\ Z_{ss} + Z_{ss}\widehat{z}_{t+1} &= r_{ss} + r_{ss}\widehat{r}_{t+1} + (1-\delta) \end{aligned} \tag{42}$$

Al considerar la relación de estado estacionario de la ecuación (41) en la ecuación (42) se tiene:

$$\begin{aligned} Z_{ss}\widehat{z}_{t+1} &= r_{ss}\widehat{r}_{t+1} \\ \frac{1}{\beta}\widehat{z}_{t+1} &= r_{ss}\widehat{r}_{t+1} \\ \widehat{z}_{t+1} &= \beta r_{ss}\widehat{r}_{t+1} \end{aligned} \tag{43}$$

Al introducir la ecuación (43) en (40) se obtiene la ecuación log-lineal de Euler:

$$\begin{aligned} -\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{z}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}] \\ -\widehat{c}_t &= E_t[\beta r_{ss}\widehat{r}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}] \end{aligned} \tag{44}$$

Oferta de trabajo: para obtener la ecuación log-lineal de la oferta de trabajo, al igual que la ecuación de Euler, se realiza un cambio de variable para que todos los términos de la ecuación estén multiplicando. En ese sentido se reemplaza $1-h_t$ por hh_t (línea dos de la ecuación (45). Asimismo, al igual que en las ecuaciones previas, cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$ (tercera línea de la ecuación (45)), y se ha aplicado la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1+\widehat{x}$)(séptima línea de la ecuación (45)).

$$\begin{aligned} \theta(1-h_t)^{-\gamma_n} &= \frac{w_t}{c_t} \\ \theta(hh_t)^{-\gamma_n} &= \frac{w_t}{c_t} \\ \theta(hh_{ss}e^{\widehat{hh}_t})^{-\gamma_n} &= \frac{w_{ss}e^{\widehat{w}_t}}{h_{ss}e^{\widehat{c}_t}} \\ \theta hh_{ss}^{-\gamma_n}e^{-\gamma_n\widehat{hh}_t} &= \frac{w_{ss}e^{\widehat{w}_t}}{h_{ss}e^{\widehat{c}_t}} \\ e^{-\gamma_n\widehat{hh}_t} &= \frac{e^{\widehat{w}_t}}{e^{\widehat{c}_t}} \\ e^{-\gamma_n\widehat{hh}_t} &= e^{\widehat{w}_t-\widehat{c}_t} \\ 1-\gamma_n\widehat{hh}_t &= 1+\widehat{w}_t-\widehat{c}_t \\ -\gamma_n\widehat{hh}_t &= \widehat{w}_t-\widehat{c}_t \end{aligned} \tag{45}$$

Para terminar de encontrar la ecuación log-lineal de la oferta de trabajo es necesario encontrar la versión log-lineal del cambio de variable: $hh_t = 1-h_t$.

$$
\begin{aligned}
hh_t &= 1 - h_t \\
hh_{ss}e^{\widehat{hh}_t} &= 1 - h_{ss}e^{\widehat{h}_t} \\
hh_{ss}(1 + \widehat{hh}_t) &= 1 - h_{ss}(1 + \widehat{h}_t) \\
hh_{ss} + hh_{ss}\widehat{hh}_t &= 1 - h_{ss} - h_{ss}\widehat{h}_t \\
hh_{ss}\widehat{hh}_t &= -h_{ss}\widehat{h}_t \\
\widehat{hh}_t &= -\frac{h_{ss}}{hh_{ss}}\widehat{h}_t \\
\widehat{hh}_t &= -\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t \qquad (46)
\end{aligned}
$$

Reemplazando esta ecuación (46) en la ecuación (45) se obtiene la ecuación log-linal de la oferta de trabajo (ecuación (47)):

$$
\begin{aligned}
-\gamma_n\widehat{hh}_t &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\
-\gamma_n\left[-\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t\right] &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\
\gamma_n\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \qquad (47)
\end{aligned}
$$

Demanda de trabajo: la ecuación log-lineal de la demanda de trabajo está descrita por la ecuación (48). Para ello, de la misma forma que en las ecuaciones previas, se ha reemplazado cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$ (segunda línea de la ecuación (48), y se ha aplicado la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1 + x$)(quinta línea de la ecuación (48)).

$$
\begin{aligned}
h_t &= (1 - \alpha)\frac{y_t}{w_t} \\
h_{ss}e^{\widehat{h}_t} &= (1 - \alpha)\frac{y_{ss}e^{\widehat{y}_t}}{w_{ss}e^{\widehat{w}_t}} \\
e^{\widehat{h}_t} &= \frac{e^{\widehat{y}_t}}{e^{\widehat{w}_t}} \\
e^{\widehat{h}_t} &= e^{\widehat{y}_t - \widehat{w}_t} \\
1 + \widehat{h}_t &= 1 + \widehat{y}_t - \widehat{w}_t \\
\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{w}_t \qquad (48)
\end{aligned}
$$

Función de producción: la ecuación log-lineal de la función de producción está descrita por la ecuación (49). Para ello se ha reemplazado cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$ (segunda línea de la ecuación (49)), y se ha aplicado la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1 + x$)(sexta línea de la ecuación (49)).

$$\begin{aligned}
y_t &= a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= a_{ss} e^{\widehat{a}_t} [k_{ss} e^{\widehat{k}_t}]^{\alpha} [h_{ss} e^{\widehat{h}_t}]^{1-\alpha} \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= a_{ss} e^{\widehat{a}_t} [k_{ss}^{\alpha} e^{\alpha \widehat{k}_t}][h_{ss}^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)\widehat{h}_t}] \\
e^{\widehat{y}_t} &= e^{\widehat{a}_t} [e^{\alpha \widehat{k}_t}][e^{(1-\alpha)\widehat{h}_t}] \\
e^{\widehat{y}_t} &= e^{\widehat{a}_t + \alpha \widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t} \\
1 + \widehat{y}_t &= 1 + \widehat{a}_t + \alpha \widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha \widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t \qquad (49)
\end{aligned}$$

Equilibrio mercado de bienes: al igual que en las ecuaciones previas, para obtener la condición de equilibrio en el mercado de bienes log-lineal se debe de reemplazar cada variable x_t por su expresión $x_{ss} e^{\widehat{x}_t}$ (segunda línea de la ecuación (50)), y se debe de aplicar la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1 + x$)(tercera línea de la ecuación (50)).

$$\begin{aligned}
y_t &= c_t + i_t \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= c_{ss} e^{\widehat{c}_t} + i_{ss} e^{\widehat{i}_t} \\
y_{ss}(1 + \widehat{y}_t) &= c_{ss}(1 + \widehat{c}_t) + i_{ss}(1 + \widehat{i}_t) \\
y_{ss} + y_{ss}\widehat{y}_t &= c_{ss} + c_{ss}\widehat{c}_t + i_{ss} + i_{ss}\widehat{i}_t \\
y_{ss}\widehat{y}_t &= c_{ss}\widehat{c}_t + i_{ss}\widehat{i}_t \\
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \qquad (50)
\end{aligned}$$

Ley de movimiento del capital: la ley de movimiento del capital log-lineal está expresada en la ecuación (51). De igual forma que en las ecuaciones previas, se ha aplicado la transformación de la variable inicial k_t por su equivalente en log-desviaciones (línea 2 de la ecuación (51)). Además, se ha considerado la apróximación de Taylor de primer orden de dicha transformación (línea 5 de la ecuación (51)).

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t \\
k_{ss} e^{\widehat{k}_{t+1}} &= (1-\delta)k_{ss} e^{\widehat{k}_t} + i_{ss} e^{\widehat{i}_t} \\
e^{\widehat{k}_{t+1}} &= (1-\delta)e^{\widehat{k}_t} + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} e^{\widehat{i}_t} \\
e^{\widehat{k}_{t+1}} &= (1-\delta)e^{\widehat{k}_t} + \delta e^{\widehat{i}_t} \\
1 + \widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)(1 + \widehat{k}_t) + \delta(1 + \widehat{i}_t) \\
1 + \widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta) + (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta + \delta\widehat{i}_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t \qquad (51)
\end{aligned}$$

Choque de productividad: en estricto el choque de productividad está representada por la variable ϵ_t, la cual tiene una distribución normal con media cero y varianza constante. En este sentido, la ecuación (52) representa la ecuación log-lineal de la productividad (no del choque).

$$\begin{aligned} lna_t &= \phi lna_{t-1} + \epsilon_t \\ lna_{ss}e^{\widehat{a}_t} &= \phi lna_{ss}e^{\widehat{a}_{t-1}} + \epsilon_t \\ lna_{ss} + \widehat{a}_t &= \phi lna_{ss} + \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \\ \widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned} \tag{52}$$

El cuadro [6] resume el sistema de ecuaciones log-lineales que describen el modelo.

Cuadro 6: Sistema de ecuaciones log-lineal

Ecuaciones log-lineal	**Descripción**
$-\widehat{c}_t = E_t[\beta r_{ss}\widehat{r}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}]$	Ecuación de Euler
$\widehat{k}_t = \widehat{y}_t - \widehat{r}_t$	Demanda del capital
$\gamma_n \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t = \widehat{w}_t - \widehat{c}_t$	Oferta de trabajo
$\widehat{h}_t = \widehat{y}_t - \widehat{w}_t$	Demanda de trabajo
$\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t$	Función de producción
$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t$	Equilibrio mercado de bienes
$\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$	Ley de movimiento del capital
$\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

2.5. Solución del sistema lineal

2.5.1. Método de coeficientes indeterminados

En la literatura de modelos de equilibrio general, los métodos para encontrar la solución se han focalizado en resolver el sistema de ecuaciones lineales (o log-lineales). De manera similar a los capítulos previos, en este capítulo se aplica el método de coeficientes indeterminados. La solución consiste en colocar las variables endógenas en función de las variables de estado y del choque. Por ejemplo para el capital, el producto y el consumo se tiene:

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \tag{53}$$

$$\widehat{y}_t = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \eta_{ya}\widehat{a}_t \tag{54}$$

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t \tag{55}$$

Cabe mencionar que debido a que el sistema de ecuaciones ha sido log-linealizado (ver cuadro [4]), entonces las variables están expresadas como log-desviaciones de su estado estacionario; es decir, $\widehat{x}_t = lnx_t - lnx_{ss}$. Asimismo, los coeficientes de la solución (por ejemplo, las ecuaciones (53), (54) y (55)) expresan elasticidad; es decir, de la ecuación (53) se puede apreciar lo siguiente: si el capital de hoy se incrementa en 1 %, entonces el capital de mañana se incrementa en η_{kk} %. Esto se observa en la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \\
\text{Diferenciando} &: \\
\Delta\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{kk}\Delta\widehat{k}_t + \eta_{ka}\Delta\widehat{a}_t \\
\text{Asumiendo} &: \quad \widehat{a}_t \quad \text{se mantiene constante} \\
\Delta\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{kk}\Delta\widehat{k}_t + 0 \\
\Delta[lnk_{t+1} - lnk_{ss}] &= \eta_{kk}\Delta[lnk_t - lnk_{ss}] \\
\Delta[lnk_{t+1}] - 0 &= \eta_{kk}\Delta[lnk_t] - 0 \\
\frac{\Delta k_{t+1}}{k_{t+1}} &= \eta_{kk}\frac{\Delta k_t}{k_t} \\
\frac{\frac{\Delta k_{t+1}}{k_{t+1}}}{\frac{\Delta k_t}{k_t}} &= \eta_{kk} \\
E_{k_{t+1},k_t} &= \eta_{kk} \qquad (56)
\end{aligned}
$$

La expresión (56) indica claramente que η_{kk} representa la elasticidad del capital de mañana ante el capital de hoy manteniendo lo demás constante. Por tanto, un incremento en 1 % en el capital de hoy incrementa en η_{kk} % el capital de mañana manteniendo lo demás constante. De esta forma se lee cada uno de los coeficientes de la solución del modelo. Cabe mencionar que cualquiera sea el método de solución del modelo la solución siempre está descrita por las ecuaciones (53), (54), (55) y las demás ecuaciones de las variables endógenas que mantienen la misma forma. El método de coefientes indeterminados consiste en encontrar los valores de los coeficientes de la solución en función de los parámetros. Cuando se encuentra dichos coeficientes entonces la solución queda bien definida.

Antes de aplicar el método de coeficientes indeterminados se debe de reducir el sistema de ecuaciones lo máximo posible. En este modelo de ocho ecuaciones, lo ideal sería reducir el sistema hasta tres o cuatro ecuaciones.

[A] Reducción de sistema I: el sistema de ocho ecuaciones descritos en el cuadro [4] se puede reducir a cinco al eliminar el salario real w_t por medio del equilibrio en el mercado de trabajo, al eliminar la inversión $\widehat{i}_t$ al reemplazar la ley del movimiento del capital en el equilibrio del mercado de bienes, y al elimimar la tasa de interés real $\widehat{r}_t$ por medio de la introducción de la demanda de capital en la ecuación de Euler.

Eliminando el salario real w_t: de la demanda de trabajo se despeja el salario real:

$$
\begin{aligned}
\text{Demanda de trabajo} &: \\
\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{w}_t \\
\widehat{w}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \qquad (57)
\end{aligned}
$$

La ecuación (57) se reemplaza en la oferta de trabajo, la cual esta descrita por la siguiente ecuación:

$$\gamma_n \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t = \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \tag{58}$$

Al igualar la oferta de trabajo con la demanda de trabajo en el salario real se tiene:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\gamma_n\left[\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\right]}_{=m_1}\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t - \widehat{c}_t \\
m_1\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t - \widehat{c}_t \\
(1+m_1)\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{c}_t \qquad (59)
\end{aligned}$$

Eliminando la inversión i_t: de la ley del movimiento del capital se despeja la inversión y se reemplaza en el equilibrio del mercado de bienes.

$$\begin{aligned}
\text{Ley de movimiento del capital} &: \\
\widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t \\
\delta\widehat{i}_t &= \widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t \\
\widehat{i}_t &= \frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t] \qquad (60) \\
\text{Equilibrio en el mercado de bienes} &: \\
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\underbrace{\widehat{i}_t}_{\text{Ecu. (60)}} \\
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t]\right] \qquad (61)
\end{aligned}$$

Eliminando la tasa de interés real r_t: de la demanda de capital se despeja la tasa de interés y luego se reemplaza en la ecuación de Euler.

$$\begin{aligned}
\text{Demanda de capital} &: \\
\widehat{k}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{r}_t \\
\widehat{r}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{k}_t \qquad (62) \\
\text{Ecuación de Euler} &: \\
-\widehat{c}_t &= E_t[\beta r_{ss}\widehat{r}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}] \\
\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1} - \beta r_{ss}\underbrace{\widehat{r}_{t+1}}_{\text{Ecu. (62)}}] \\
\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1} - \beta r_{ss}[\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}]] \qquad (63)
\end{aligned}$$

Con estas reducciones el sistema estaría compuesto por cinco ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
(1+m_1)\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{c}_t & (64)\\
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t]\right] & (65)\\
\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1} - \beta r_{ss}[\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}]] & (66)\\
\text{Función de producción} &: \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t & (67)\\
\text{Choque de productividad} &: \\
\widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t & (68)
\end{aligned}
$$

[B] Reducción de sistema II: el sistema podría reducirse aún más. De la ecuación (64) se despeja el trabajo $\widehat{h}_t$ y se introduce en la ecuación (67) (función de producción).

$$
\begin{aligned}
\text{Equilibrio en el mercado de trabajo} &: \\
(1+m_1)\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{c}_t \\
\widehat{h}_t &= \left[\frac{1}{1+m_1}\right][\widehat{y}_t - \widehat{c}_t] & (69)\\
\text{Función de produción} &: \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\underbrace{\widehat{h}_t}_{\text{Ecu. (69)}} \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\left[\frac{1}{1+m_1}\right][\widehat{y}_t - \widehat{c}_t] \\
\left[1 - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t \\
\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t & (70)
\end{aligned}
$$

Con estas reducciones adicionales el sistema estaría compuesto por cuatro ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t & (71)\\
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t]\right] & (72)\\
\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1} - \beta r_{ss}[\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}]] & (73)\\
\text{Choque de productividad} &: \\
\widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t & (74)
\end{aligned}
$$

[C] Reducción de sistema III: el sistema previo de cuatro ecuaciones aún puede reducirse en una ecuación más. Para ello se despeja el producto $\widehat{y}_t$ de la ecuación (71) y se reemplaza en la ecuación (72) y (73).

$$\begin{aligned}\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t+\alpha\widehat{k}_t-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t\\ \widehat{y}_t &= \left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\left[\widehat{a}_t+\alpha\widehat{k}_t-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t\right]\end{aligned}\tag{75}$$

La ecuación (75) se reemplaza en la ecuación (71):

$$\begin{aligned}\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t+\frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1}-(1-\delta)\widehat{k}_t]\right]\\ \left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\left[\widehat{a}_t+\alpha\widehat{k}_t-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t\right] &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t+\frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1}-(1-\delta)\widehat{k}_t]\right]\\ \left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\widehat{a}_t+\alpha\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\widehat{k}_t-\left[\frac{1-\alpha}{m_1+\alpha}\right]\widehat{c}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t+\frac{i_{ss}}{y_{ss}\delta}\widehat{k}_{t+1}-\frac{i_{ss}(1-\delta)}{y_{ss}\delta}\widehat{k}_t\\ \underbrace{\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]}_{m_2}\widehat{a}_t+\widehat{k}_t\underbrace{\left[\frac{\alpha(1+m_1)}{m_1+\alpha}+\frac{i_{ss}(1-\delta)}{y_{ss}\delta}\right]}_{m_3} &= \widehat{c}_t\underbrace{\left[\frac{c_{ss}}{y_{ss}}+\frac{1-\alpha}{m_1+\alpha}\right]}_{m_4}+\underbrace{\frac{i_{ss}}{y_{ss}\delta}}_{m_5}\widehat{k}_{t+1}\\ m_2\widehat{a}_t+m_3\widehat{k}_t &= m_4\widehat{c}_t+m_5\widehat{k}_{t+1}\\ m_4\widehat{c}_t &= m_2\widehat{a}_t+m_3\widehat{k}_t-m_5\widehat{k}_{t+1}\end{aligned}\tag{76}$$

De la misma manera la ecuación (75) se reemplaza en la ecuación (72):

$$\begin{aligned}\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1}-\beta r_{ss}[\widehat{y}_{t+1}-\widehat{k}_{t+1}]]\\ \widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1}-\beta r_{ss}[\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\left[\widehat{a}_{t+1}+\alpha\widehat{k}_{t+1}-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_{t+1}\right]-\widehat{k}_{t+1}]]\\ \widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1}-\beta r_{ss}\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\left[\widehat{a}_{t+1}+\alpha\widehat{k}_{t+1}-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_{t+1}\right]-\beta r_{ss}\widehat{k}_{t+1}]\\ \widehat{c}_t &= E_t[(1+\beta r_{ss}\frac{1-\alpha}{m_1+\alpha})\widehat{c}_{t+1}-\beta r_{ss}\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\widehat{a}_{t+1}+(\beta r_{ss}-\beta r_{ss}\frac{1+m_1}{m_1+\alpha})\widehat{k}_{t+1}\\ \widehat{c}_t &= E_t[\underbrace{(1+\beta r_{ss}\frac{1-\alpha}{m_1+\alpha})}_{n_1}\widehat{c}_{t+1}-\underbrace{\beta r_{ss}\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}}_{n_2}\widehat{a}_{t+1}+\underbrace{(\beta r_{ss}-\beta r_{ss}\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\alpha)}_{n_3}\widehat{k}_{t+1}\\ \widehat{c}_t &= E_t[n_1\widehat{c}_{t+1}-n_2\widehat{a}_{t+1}+n_3\widehat{k}_{t+1}]\end{aligned}\tag{77}$$

Después de esta última reducción, el sistema de ecuaciones quedaría representado por tres ecuaciones:

$$m_4\widehat{c}_t = m_2\widehat{a}_t+m_3\widehat{k}_t-m_5\widehat{k}_{t+1}\tag{78}$$
$$\widehat{c}_t = E_t[n_1\widehat{c}_{t+1}-n_2\widehat{a}_{t+1}+n_3\widehat{k}_{t+1}]\tag{79}$$
$$\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1}+\epsilon_t\tag{80}$$

[D] Aplicación del método de coeficientes indeterminados: el sistema de ecuaciones representado por las ecuaciones (78), (79) y (80) tiene tres variables: c_t, k_{t+1} y a_t. De estas variables dos son endógenas: c_t y k_{t+1}, a las cuales se les puede proponer una solución lineal en la variable de estado k_t y la variable exógena a_t:

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \tag{81}$$
$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t \tag{82}$$

Reemplazando esta solución en la ecuación (78) se tiene:

$$\begin{aligned} m_4\widehat{c}_t &= m_2\widehat{a}_t + m_3\widehat{k}_t - m_5\widehat{k}_{t+1} \\ m_4(\eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t) &= m_2\widehat{a}_t + m_3\widehat{k}_t - m_5(\eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t) \\ (m_4\eta_{ck})\widehat{k}_t + (m_4\eta_{ca})\widehat{a}_t &= (m_2 - m_5\eta_{ka})\widehat{a}_t + (m_3 - m_5\eta_{kk})\widehat{k}_t \end{aligned} \tag{83}$$

Al igualar los coeficientes de cada variable del lado derecho con su correspondiente del lado izquierdo se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Coeficientes del capital} &: \\ m_4\eta_{ck} &= m_3 - m_5\eta_{kk} \end{aligned} \tag{84}$$
$$\begin{aligned} \text{Coeficientes de la productividad} &: \\ m_4\eta_{ca} &= m_2 - m_5\eta_{ka} \end{aligned} \tag{85}$$

Al reemplazar la solución a la ecuación (79) se tiene:

$$\begin{aligned} \widehat{c}_t &= E_t[n_1\widehat{c}_{t+1} - n_2\widehat{a}_{t+1} + n_3\widehat{k}_{t+1}] \\ \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t &= E_t[n_1(\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1} + \eta_{ca}\widehat{a}_{t+1}) - n_2\widehat{a}_{t+1} + n_3(\eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t)] \\ (\eta_{ck} - n_3\eta_{kk})\widehat{k}_t + (\eta_{ca} - n_3\eta_{ka})\widehat{a}_t &= E_t[n_1\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1} + (n_1\eta_{ca} - n_2)\widehat{a}_{t+1}] \\ \text{Considerando que} &: \widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \\ (\eta_{ck} - n_3\eta_{kk})\widehat{k}_t + (\eta_{ca} - n_3\eta_{ka})\widehat{a}_t &= E_t[n_1\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1} + (n_1\eta_{ca} - n_2)(\phi\widehat{a}_t + \epsilon_{t+1})] \\ &= E_t[n_1\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1}] + (n_1\eta_{ca} - n_2)E_t[\phi\widehat{a}_t + \epsilon_{t+1}] \\ &= E_t[n_1\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1}] + (n_1\eta_{ca} - n_2)[\phi E_t\widehat{a}_t + \underbrace{E_t\epsilon_{t+1}}_{=0}] \\ \text{Reemplazando} &: \text{la solución de } \widehat{k}_{t+1} \\ &= E_t[n_1\eta_{ck}(\eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t)] + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi\widehat{a}_t \\ &= E_t[n_1\eta_{ck}\eta_{kk}\widehat{k}_t + n_1\eta_{ck}\eta_{ka}\widehat{a}_t] + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi\widehat{a}_t \\ &= (n_1\eta_{ck}\eta_{kk})\widehat{k}_t + (n_1\eta_{ck}\eta_{ka} + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi)\widehat{a}_t \\ (\eta_{ck} - n_3\eta_{kk})\widehat{k}_t + (\eta_{ca} - n_3\eta_{ka})\widehat{a}_t &= (n_1\eta_{ck}\eta_{kk})\widehat{k}_t + (n_1\eta_{ck}\eta_{ka} + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi)\widehat{a}_t \end{aligned} \tag{86}$$

De la ecuación (86) se igualan los coeficientes para cada variable. Para el capital se tiene:

$$\begin{aligned} \eta_{ck} - n_3\eta_{kk} &= n_1\eta_{ck}\eta_{kk} \\ \eta_{kk} &= \frac{\eta_{ck}}{n_3 + n_1\eta_{ck}} \end{aligned} \tag{87}$$

En el caso de la productividad, al igualar los coeficientes se tiene:

$$\begin{aligned} \eta_{ca} - n_3\eta_{ka} &= n_1\eta_{ck}\eta_{ka} + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi \\ (1-\phi n_1)\eta_{ca} &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \end{aligned} \quad (88)$$

El método de coeficientes indeterminados consiste en encontrar los valores de los coeficientes en función a los parámetros del modelo. En este caso existen cuatro coeficientes "desconocidos" (η_{ck}, η_{ca}, η_{kk} y η_{ka}). Estas cuatro "nuevas" variables requieren cuatro ecuaciones, las cuales son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{La ecuación (84)} &: \\ m_4\eta_{ck} &= m_3 - m_5\eta_{kk} \\ \text{La ecuación (85)} &: \\ m_4\eta_{ca} &= m_2 - m_5\eta_{ka} \\ \text{La ecuación (87)} &: \\ \eta_{kk} &= \frac{\eta_{ck}}{n_3 + n_1\eta_{ck}} \\ \text{La ecuación (88)} &: \\ (1-\phi n_1)\eta_{ca} &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \end{aligned}$$

[D1] Función de política del consumo y del capital: para solucionar el sistema de ecuaciones ((84), (85), (87) y (88)) donde las variables son los coeficientes de la funcion de política del consumo y de la función de estado se requiere reducir las ecuaciones. En primer lugar, de la ecuación (84) se despeja η_{ck} y se reemplaza en la ecuación (87) para encontrar el valor de η_{kk}.

$$\begin{aligned} \text{De la ecuación (84)} &: \\ m_4\eta_{ck} &= m_3 - m_5\eta_{kk} \\ \eta_{ck} &= \frac{1}{m_4}(m_3 - m_5\eta_{kk}) \qquad (89) \\ \text{De la ecuación (87)} &: \\ \eta_{kk} &= \frac{\eta_{ck}}{n_3 + n_1\eta_{ck}} \\ n_3\eta_{kk} + n_1\eta_{ck}\eta_{kk} &= \eta_{ck} \\ n_3\eta_{kk} &= \underbrace{\eta_{ck}}_{\text{Ecu. (89)}}(1 - n_1\eta_{kk}) \\ n_3\eta_{kk} &= \frac{1}{m_4}(m_3 - m_5\eta_{kk})(1 - n_1\eta_{kk}) \\ m_4n_3\eta_{kk} &= (m_3 - m_5\eta_{kk})(1 - n_1\eta_{kk}) \\ m_4n_3\eta_{kk} &= m_3 - m_3n_1\eta_{kk} - m_5\eta_{kk} + m_5n_1\eta_{kk}^2 \\ \underbrace{m_5n_1}_{=a}\eta_{kk}^2 + \underbrace{-(m_3n_1 + m_5 + m_4n_3)}_{=b}\eta_{kk} + \underbrace{m_3}_{=c} &= 0 \qquad (90) \\ a\eta_{kk}^2 + b\eta_{kk} + c &= 0 \qquad (91) \end{aligned}$$

La ecuación (91) tiene dos soluciones:

$$\eta_{kk_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dado que se requiere que el capital sea estacionario, entonces η_{kk} debe ser menor a uno en valor absoluto; es decir, $\eta_{kk} \in]-1, 1[$.

Cuadro 7: Valor de $\eta_{kk_{1,2}}$

θ	β	δ	γ_n	α	η_{kk_1}	η_{kk_2}
2	0.984	0.025	0.25	0.333	1.0897	0.9326

El valor de η_{kk} que se elige es $\eta_{kk2} = 0.9326$. Dado el valor de η_{kk}, entonces se puede encontrar η_{ck} de la ecuación (84):

$$\eta_{ck} = \frac{1}{m_4}(m_3 - m_5\eta_{kk}) \tag{92}$$

Para encontrar el valor del coeficiente η_{ka} se despeja η_{ca} de la ecuación (85) y se reemplaza en la ecuación (88):

$$\begin{aligned}
\text{De la ecuación (85)} &: \\
m_4\eta_{ca} &= m_2 - m_5\eta_{ka} \\
\eta_{ca} &= \frac{1}{m_4}(m_2 - m_5\eta_{ka}) \qquad (93) \\
\text{De la ecuación (88)} &: \\
(1-\phi n_1)\underbrace{\eta_{ca}}_{\text{Ecu. (93)}} &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \\
(1-\phi n_1)\left(\frac{1}{m_4}(m_2 - m_5\eta_{ka})\right) &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \\
\frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1) - \frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1)\eta_{ka} &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \\
-\eta_{ka}\left[\frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1) + n_1\eta_{ck} + n_3\right] &= -\phi n_2 - \frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1) \\
\eta_{ka}\left[\frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1) + n_1\eta_{ck} + n_3\right] &= \phi n_2 + \frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1) \\
\eta_{ka} &= \frac{\phi n_2 + \frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1)}{\frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1) + n_1\eta_{ck} + n_3} \qquad (94)
\end{aligned}$$

Finalmente, η_{ca} se obtiene de la ecuación (85):

$$\begin{aligned}
m_4\eta_{ca} &= m_2 - m_5\eta_{ka} \\
\eta_{ca} &= \frac{1}{m_4}(m_2 - m_5\eta_{ka}) \qquad (95)
\end{aligned}$$

Hasta aquí se han encontrado los valores de los coeficientes η_{ck}, η_{ca}, η_{kk} y η_{ka}, los cuales permiten definir la solución del consumo y del capital; es decir, la función de política del consumo y la función de estado del modelo[1]:

$$\widehat{k}_{t+1} = \underbrace{\eta_{kk}}_{0.9326}\widehat{k}_t + \underbrace{\eta_{ka}}_{0.1618}\widehat{a}_t \tag{96}$$

$$\widehat{c}_t = \underbrace{\eta_{ck}}_{0.5205}\widehat{k}_t + \underbrace{\eta_{ca}}_{0.4945}\widehat{a}_t \tag{97}$$

[D2] Función de política de las demás variables: la función de política del producto se obtiene de reemplazar la solución del consumo en la ecuación (71).

$$\begin{aligned}
\text{De la ecuación (71)} &: \\
\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t \\
\text{Se reemplaza la solución de } \widehat{c}_t &: \\
\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right](\eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t) \\
\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= (1 - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ca})\widehat{a}_t + (\alpha - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ck})\widehat{k}_t \\
\widehat{y}_t &= \underbrace{\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right](1 - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ca})}_{\eta_{ya}}\widehat{a}_t + \underbrace{\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right](\alpha - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ck})}_{\eta_{yk}}\widehat{k}_t \\
\widehat{y}_t &= \eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t \qquad (98)
\end{aligned}$$

De otro lado, la función de política del trabajo se obtiene de reemplazar la solución del consumo y del producto en la ecuación (64):

$$\begin{aligned}
\text{De la ecuación (71)} &: \\
(1+m_1)\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{c}_t \\
\text{Reemplazando} &: \text{ la solución de } \widehat{c}_t \text{ y } \widehat{y}_t \\
(1+m_1)\widehat{h}_t &= (\eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t) - (\eta_{ca}\widehat{a}_t + \eta_{ck}\widehat{k}_t) \\
(1+m_1)\widehat{h}_t &= (\eta_{ya} - \eta_{ca})\widehat{a}_t + (\eta_{yk} - \eta_{ck})\widehat{k}_t \\
\widehat{h}_t &= \left(\frac{\eta_{ya}-\eta_{ca}}{1+m_1}\right)\widehat{a}_t + \left(\frac{\eta_{yk}-\eta_{ck}}{1+m_1}\right)\widehat{k}_t \\
\widehat{h}_t &= \eta_{ha}\widehat{a}_t + \eta_{hk}\widehat{k}_t \qquad (99)
\end{aligned}$$

Además, el salario real se obtiene de reemplazar la solución del producto y del trabajo en la demanda de trabajo (ecuación (57)).

[1]Los valores de estos coeficientes como de la solución de las demás variables endógenas se encuentran en Campbell_Lvariable.m

$$\begin{array}{rcl}
\text{De la ecuación (57)} & : & \\
\widehat{w}_t & = & \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \\
\text{Reemplazando} & : & \text{la solución de } \widehat{y}_t \text{ y } \widehat{h}_t \\
\widehat{w}_t & = & (\eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t) - (\eta_{ha}\widehat{a}_t + \eta_{hk}\widehat{k}_t) \\
\widehat{w}_t & = & (\eta_{ya} - \eta_{ha})\widehat{a}_t + (\eta_{yk} - \eta_{hk})\widehat{k}_t \\
\widehat{w}_t & = & \eta_{wa}\widehat{a}_t + \eta_{wk}\widehat{k}_t
\end{array} \quad (100)$$

La inversión se obtiene al reemplazar la solución del producto y del consumo en la ecuación del equilibrio de mercado de bienes:

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{y}_t & = & \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\
\widehat{i}_t & = & \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t) \\
\text{Reemplazando} & : & \text{la solución de } \widehat{y}_t \text{ y } \widehat{c}_t \\
\widehat{i}_t & = & \frac{y_{ss}}{i_{ss}}((\eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t) - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}(\eta_{ca}\widehat{a}_t + \eta_{ck}\widehat{k}_t)) \\
\widehat{i}_t & = & \frac{y_{ss}}{i_{ss}}((\eta_{yk} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})\widehat{k}_t + (\eta_{ya} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})\widehat{a}_t) \\
\widehat{i}_t & = & \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\eta_{yk} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})\widehat{k}_t + \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\eta_{ya} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})\widehat{a}_t \\
\widehat{i}_t & = & \eta_{ik}\widehat{k}_t + \eta_{ia}\widehat{a}_t
\end{array} \quad (101)$$

Finalmente, la tasa de interés real se obtiene de reemplazar la solución del producto y de capital en la demanda del capital.

$$\begin{array}{rcl}
\text{De la ecuación (62)} & : & \\
\widehat{r}_t & = & \widehat{y}_t - \widehat{k}_t \\
\text{Reemplazando} & : & \text{la solución de } \widehat{y}_t \\
\widehat{r}_t & = & (\eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t) - \widehat{k}_t) \\
\widehat{r}_t & = & (\eta_{yk} - 1)\widehat{k}_t + \eta_{ya}\widehat{a}_t \\
\widehat{r}_t & = & \eta_{rk}\widehat{k}_t + \eta_{ra}\widehat{a}_t
\end{array} \quad (102)$$

En el cuadro [8] se menciona la solución (funciones de política y de estado) del sistema de ecuaciones log-lineal.

Cuadro 8: Funciones de política y de estado

Solución	Coeficientes	
$\widehat{k}_t = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t$	$\eta_{kk_{1,2}} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$\eta_{ka} = \frac{\phi n_2 + \frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1)}{\frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1)+n_1\eta_{ck}+n_3}$
$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t$	$\eta_{ck} = \frac{1}{m_4}(m_3 - m_5\eta_{kk})$	$\eta_{ca} = \frac{1}{m_4}(m_2 - m_5\eta_{ka})$
$\widehat{y}_t = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \eta_{ya}\widehat{a}_t$	$\eta_{yk} = \left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right](\alpha - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ck})$	$\eta_{ya} = \left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right](1 - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ca})$
$\widehat{h}_t = \eta_{hk}\widehat{k}_t + \eta_{ha}\widehat{a}_t$	$\eta_{hk} = \left(\frac{\eta_{yk}-\eta_{ck}}{1+m_1}\right)$	$\eta_{ha} = \left(\frac{\eta_{ya}-\eta_{ca}}{1+m_1}\right)$
$\widehat{w}_t = \eta_{wk}\widehat{k}_t + \eta_{wa}\widehat{a}_t$	$\eta_{wk} = \eta_{yk} - \eta_{hk}$	$\eta_{wa} = \eta_{ya} - \eta_{ha}$
$\widehat{i}_t = \eta_{ik}\widehat{k}_t + \eta_{ia}\widehat{a}_t$	$\eta_{ik} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\eta_{yk} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})$	$\eta_{ia} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\eta_{ya} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})$
$\widehat{r}_t = \eta_{rk}\widehat{k}_t + \eta_{ra}\widehat{a}_t$	$\eta_{rk} = \eta_{yk} - 1$	$\eta_{ra} = \eta_{ya}$

2.5.2. Solución obtenida de Dynare

El sistema de ecuaciones no-lineal descrito en el cuadro [2] se ha colocado en el archivo .mod "Campbell_Lvariable_Dynare_nolineal_log5". Este archivo, que contiene el modelo, tiene dos características que vale la pena comentar: la primera es que las variables están en logarítmo. El objetivo de ello es que cuando Dynare linealice el sistema aparezca la variable en log-desviaciones; es decir, $\widehat{x}_t = lnx_t - lnx_{ss}$. Cabe mencionar que bajo este tipo de variable, Dynare mostrará la solución (función de política y de estado) y la función impulso-respuesta en términos de $\widehat{x}_t$. La segunda característica es que el modelo que se ha escrito en este archivo es no-lineal y se le ha pedido a Dynare que linealice el sistema por medio del comando "order=1" en "stoch_simul". El cuadro [9] muestra la solución del modelo tal cual Dynare brinda en la pantalla de Matlab.

Cuadro 9: Función de política y de estado

	cc	ii	yy	kk	hh	rr	ww	aa
Constant	-0.1718	-1.5471	0.0535	2.1418	-0.9890	-3.1879	0.6376	0
kk(-1)	0.5205	-1.6972	0.0730	0.9326	-0.3898	-0.9270	0.4628	0
aa(-1)	0.4698	6.1500	1.6159	0.1538	0.9983	1.6159	0.6176	0.95
e	0.4945	6.4737	1.7009	0.1618	1.0508	1.7009	0.6501	1

Nota: los resultados se han obtenido de "Campbell_Lvariable_Dynare_nolineal_log5.mod"

Para leer correctamente el cuadro [9] se debe de tomar en cuenta las siguientes consideraciones. En primer lugar, cada columna representa la función de política de la variable del encabezado. Por ejemplo, la segunda columna es la función de política del consumo, la tercera columna es la función de política de la inversión y así sucesivamente. Cabe destacar que la cuarta columna es la ecuación de estado.

En segundo lugar, las variables endógenas del encabezado del cuadro [9] expresan cada variable en logarítmo. Por ejemplo, el consumo cc es igual al lnc_t, de igual manera para el producto: $yy = lny_t$. En el caso del capital "kk" este es igual al logarítmo del capital en "t+1"; es decir, $kk = lnk_{t+1}$. Esto se debe a que en el archivo mod el capital en "t" se ha escrito como $kk(-1)$, de otro modo Dynare entendería que esta variable es de control cuando en realidad es de estado.

En tercer lugar, la "constante" en la segunda fila del cuadro [9] representa el logarítmo de cada una de las variables en estado estacionario. Por ejemplo, en la ecuación del consumo se tiene que $-0.1718 = lnc_{ss}$, lo cual a su vez permite encontrar el estado estacionario de la variable en niveles: $c_{ss} = e^{-0.1718} = 0.8421$. En cuarto lugar, en la primera columna del cuadro [9] está la variable de estado y la variable exógena. La variable $kk(-1)$ es igual a $\widehat{k}_t = lnk_t - lnk_{ss}$; además, $aa(-1) = \widehat{a}_{t-1} = lna_{t-1} - lna_{ss}$ y e representa el choque de productividad ϵ_t. Con todas estas consideraciones se reexpresa el cuadro [9], cuyos resultados se muestran en el cuadro [10].

Cuadro 10: Función de política y de estado

	$ln(c_t)$	$ln(i_t)$	$ln(y_t)$	$ln(k_{t+1})$	$ln(h_t)$	$ln(r_t)$	$ln(w_t)$	$ln(a_t)$
constante	-0.1718	-1.5471	0.0535	2.1418	-0.9890	-3.1879	0.6376	0
$\widehat{k}_t$	0.5205	-1.6972	0.0730	0.9326	-0.3898	-0.9270	0.4628	0
$\widehat{a}_{t-1}$	0.4698	6.1500	1.6159	0.1538	0.9983	1.6159	0.6176	0.95
e_t	0.4945	6.4737	1.7009	0.1618	1.0508	1.7009	0.6501	1

Nota: los resultados se han obtenido de "Campbell_Lvariable_nolineal_log5.mod"

En el cuadro [10] se describe la solución del sistema log-lineal. Las ecuaciones se leen de la siguiente manera, por ejemplo para el caso del consumo se tiene:

$$ln(c_t) = -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4698\widehat{a}_{t-1} + 0.4945e_t \tag{103}$$

También se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4698\widehat{a}_{t-1} + 0.4945e_t \\
ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945(\frac{0.4698}{0.4945}\widehat{a}_{t-1} + e_t) \\
ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945(0.95\widehat{a}_{t-1} + e_t) \\
ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945(\widehat{a}_t) \\
ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \\
ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \qquad (104)
\end{aligned}$$

La constante -0.1718 representa el logarítmo del consumo en estado estacionario $ln(c_{ss})$. Considerando esto último en la ecuación (104) se tiene:

$$\begin{aligned}
ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \\
ln(c_t) &= ln(c_{ss}) + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \\
ln(c_t) - ln(c_{ss}) &= 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \\
\widehat{c}_t &= 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \qquad (105)
\end{aligned}$$

El coeficiente 0.5205 y 0.4945 representa elasticidad del consumo ante el capital y la productividad respectivamente. Es decir, un incremento de 1 por ciento en el capital produce que el consumo se incremente en 0.5205 por ciento.

3. Análisis de la solución del modelo

3.1. Análisis de los coeficientes de la solución

En el análisis de los coeficientes de la solución es útil considerar que en la solución generica del modelo la variable de estado $\widehat{k}_t$ representa el estado de la economía en "t", mientras que la variable $\widehat{a}_t$ representa el choque transitorio ($\phi < 1$) a la cual la economía podría estar sujeta en "t".

$$\widehat{x}_t = \eta_{xk} \underbrace{\widehat{k}_t}_{\text{Estado de la economía}} + \eta_{xa} \underbrace{\widehat{a}_t}_{\text{Choque transitorio}}$$

3.1.1. Efectos de δ

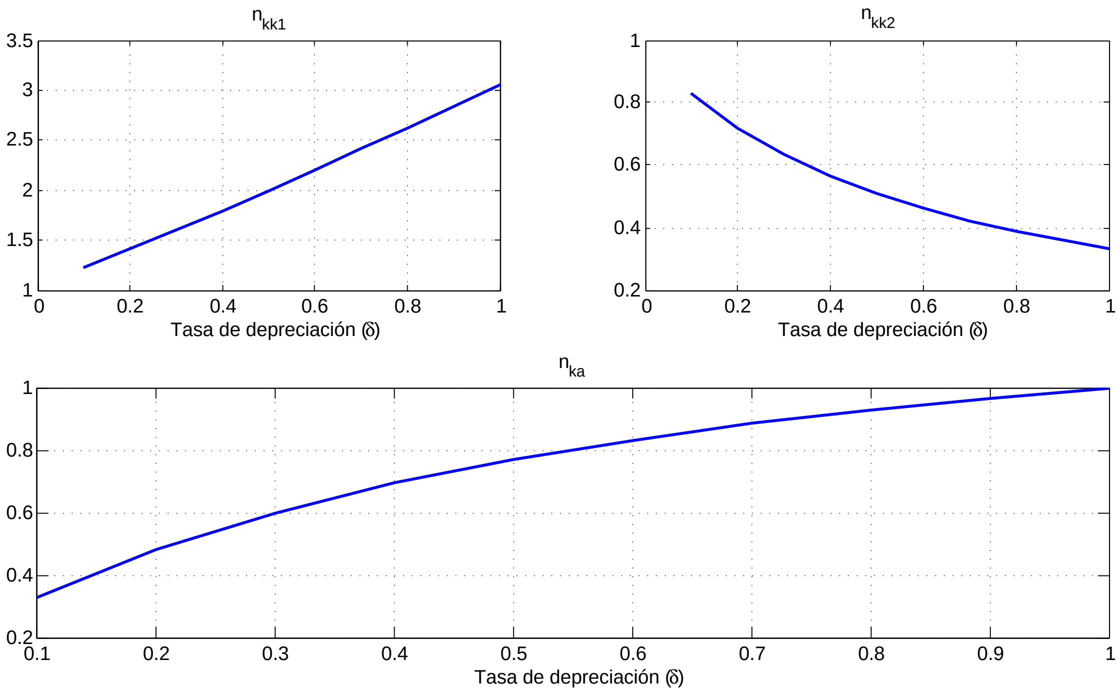
La tasa de depreciación δ tiene un rol importante en el comportamiento de los coeficientes de la solución del modelo (función de política y de estado). Por ejemplo, la elasticidad inversión-capital η_{ik} pasa de ser negativa a positiva a medida que δ se incrementa. Los diferentes valores de $\delta \in [0, 1]$ representan diversos casos. El caso extremo es cuando δ es igual a uno, el cual corresponde a uno de los supuestos del modelo de Long y Plosser (1983). Este supuesto indica que el capital se deprecia totalmente en el mismo periodo produciendo que el stock de capital se convierta en un flujo sostenido únicamente por la inversión. Esto último se observa de la ley de movimiento de capital $\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$, la cual bajo $\delta = 1$ se convierte en $\widehat{k}_{t+1} = \widehat{i}_t$.

[A] Efectos sobre el capital:

1. La persistencia del capital; es decir, su coeficiente estable (menor a 1) η_{kk2} disminuye a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [1]). Al incrementarse la tasa de depreciación, el stock de capital del siguiente periodo será menor. El caso extremo es ejemplificado por el modelo de Long y Plosser (1983), en el cual $\delta = 1$; en este caso, el stock de capital esta compuesto por el flujo de bienes de inversión, no se acumula capital del periodo previoy y por tanto el capital en menor. Todo ello produce que el capital este muy poco autocorrelacionado, lo cual se puede observar en el valor decreciente de η_{kk2} a medida que δ se fortalece. Dado que la acumulación de capital tiene un rol trasnversal en la respuesta óptima del agente representativo en todas las variables endógenas, entonces el impacto de la depreciación se extenderá en la regla de decisión (funciones de política) de todas las variables.

2. La elasticidad del capital ante la productividad η_{ka} se fortalece a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [1]). Para entender esta elasticidad es importante analizar la ley de movimiento de capital: $\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$. Esta ecuación sugiere que el capital de mañana esta afectado por el stock de capital de hoy y por la inversión cada uno ponderado por $(1-\delta)$ y δ. Entre estas dos variables, la inversión es la que reacciona ante un choque de productividad en "t": un incremento en $\widehat{a}_t$ eleva la inversión $\widehat{i}_t$, cuya elasticidad es mayor a uno (ver figura [2]). Por tanto, un incremento de la productividad eleva el capital en "t+1" por medio de la inversión; es decir, la η_{ka} es positivo. De otro lado, un incremento de la depreciación fortalece el impacto de la inversión sobre el capital en "t+1" ($\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$), lo cual sugiere que η_{ka} se fortalece a medida que δ se incrementa.

Figura 1: Efectos de δ sobre los coeficientes del capital



Nota: Todos los gráficos de la sección "Análisis de los coeficientes de la solución" se obtienen del m−file "Sensibilidad_parametros.m"

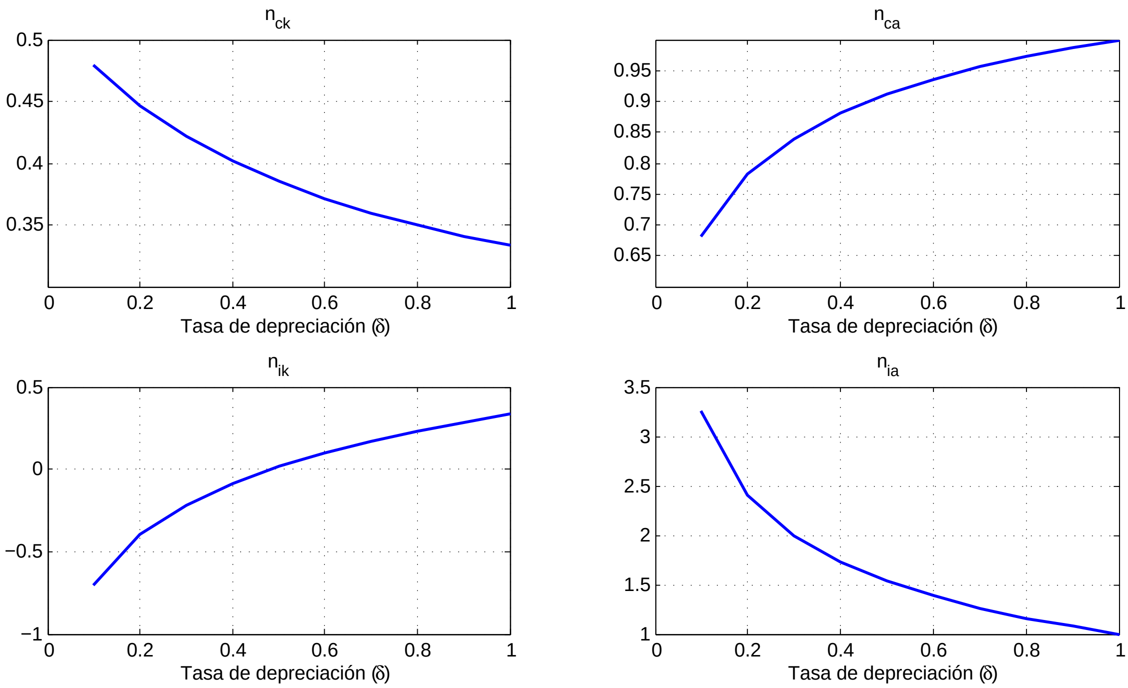
[B] Efectos sobre el consumo y la inversión:

1. La elasticidad del **consumo** ante el capital η_{ck} disminuye a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [2]). En el contexto de tasa de depreciación baja, η_{ck} es alta debido a que el agente responde reduciendo su inversión (η_{ik} negativa) por lo cual deja recursos para el consumo. Es decir, el agente representativo encuentra óptimo reducir su inversión e incrementar su consumo cuando la depreciación es baja. Sin embargo, a medida que δ se incrementa, η_{ck} se debilita debido a que el agente representativo está dispuesto a orientar más recursos a la inversión porque el capital se deprecia rapidamente.

2. La elasticidad de la **inversión** ante el capital η_{ik} pasa de ser negativo a positivo a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [2]). Si la depreciación es pequeña entonces no se necesita mucha inversión para aumentar significativamente el capital, por lo cual el agente representativo encuentra óptimo reducir su inversión ante un incremento del stock de capital en "t", lo cual se refleja en una elasticidad negativa. Sin embargo, a medida que δ se incrementa, se requiere mayor inversión para reponer el capital depreciado e incrementar el stock de capital, lo cual se refleja en un fortalecimiento de dicha elasticidad η_{ik}; es más, esta elasticidad que para niveles bajos de depreciación es negativa pasa a ser positiva desde un $\delta = 0.5$ apróximadamente.

3. La elasticidad del **consumo** ante la productividad η_{ca} se fortalece a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [2]). De otro lado, se observa que la

Figura 2: Efectos de δ sobre los coeficientes del consumo e inversión



elasticidad del **inversión** ante la productividad η_{ia} se debilita a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [2]). Para niveles pequeños de la tasa de depreciación, la respuesta del agente representativo ante un choque transitorio $\widehat{a}_t$ es responder fuertemente en el ahorro (inversión) y dejar que el consumo reaccione debilmente. Esto se refleja en los valores altos de η_{ia} y bajos de η_{ca} para valores de δ pequeños. Esto tiene sentido con la teoría del consumidor que indica que el agente prefiere suavizar consumo ante choques transitorios. De otro lado, se observa que una mayor tasa de depreciación incentiva a que el agente representativo destine el efecto riqueza producido por el choque de productividad a un mayor consumo y reduzca su inversión. Esto se refleja en el fortalecimiento de η_{ca} y debilitamiento de η_{ia}. Cabe mencionar que η_{ia} tiene más volatilidad que η_{ca}. Para valores de $\delta \in [0.025 - 1]$, η_{ia} toma valores desde $[6.47 - 1]$; en cambio η_{ca} tiene valores más acotados $[0.49 - 1]$ para el mismo rango de los valores de δ.

[C] Efectos sobre el producto y la tasa de interés:

1. La elasticidad del **producto** ante el capital η_{yk} se fortalece a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [3]). Un incremento del capital, manteniendo fijo el trabajo, incrementa la producción por medio de la función de producción ($\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t$) independientemente del valor de δ; lo cual se refleja en el signo positivo de η_{yk}. Además, una mayor tasa de depreciación reduce el stock de capital y por ende incrementa la productividad marginal del capital (por su naturaleza decreciente en el capital), lo cual se refleja en el incremento de la elasticidad producto-capital η_{yk} a medida que δ crece (y que se reduce capital).

2. La elasticidad del **producto** ante la productividad η_{ya} se debilita a medida que la

tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [3]). El choque de productividad incrementa la producción por medio de la función de producción, lo cual se refleja en el signo positivo de η_{ya}. Sin embargo, esta elasticidad se reduce a medida que aumenta δ debido que el incremento de la depreciación reduce el stock del capital lo cual mitiga parcialmente el efecto de la productividad. Entonces, el choque de productividad tendrá menor efecto sobre el producto a medida que el stock de capital se reduzca o de manera equivalente a medida que δ se incremente.

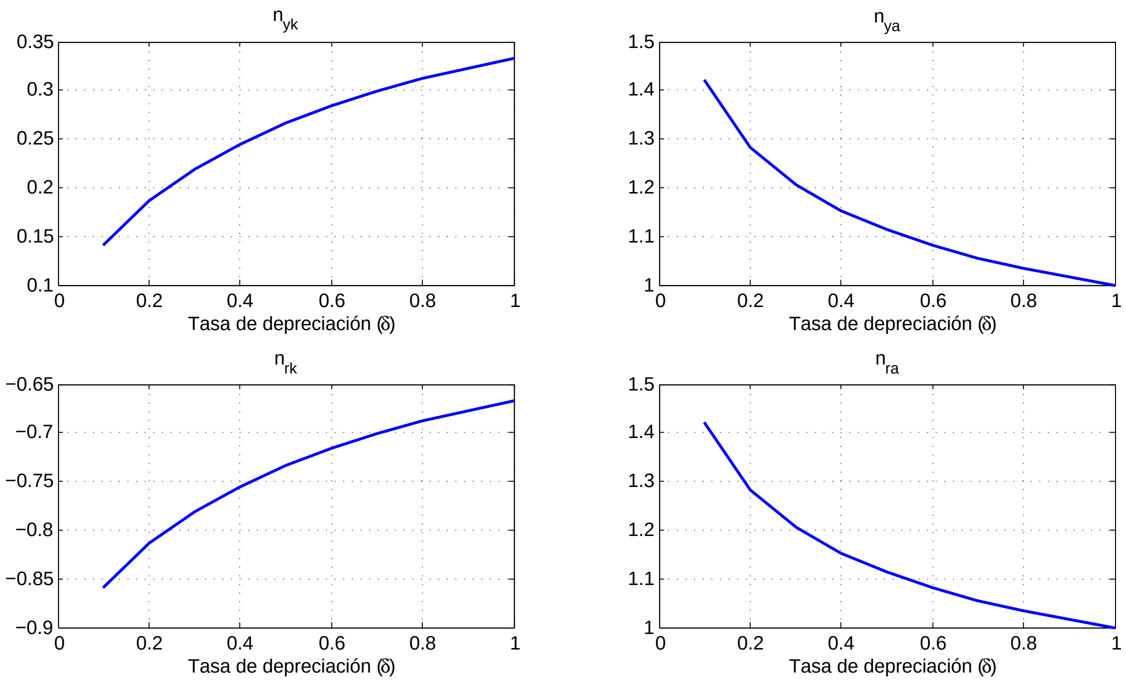
3. La elasticidad de la **tasa de interés** ante el capital η_{rk} es negativa para cualquier valor de la tasa de depreciación y se reduce a medida que δ se incrementa (ver la figura [3]). El signo de esta elasticidad refleja la demanda del capital (pendiente negativa con respecto al capital) y los valores de esta elasticidad reflejan el equilibrio del mercado de capital. La forma correcta de leer los valores de η_{rk} es la siguiente: para valores bajos de δ, un incremento de la oferta de capital (vertical) produce una reducción de la tasa de interés (manteniendo la demanda de capital invariante). En este escenario, no importa la magnitud de la expansión de la oferta (pequeña o significativa), en cualquier caso la tasa de interés siempre se reducirá. Esto último indica que la elasticidad tasa de interés - capital η_{rk} tiene signo negativo. De otro lado, si la tasa de depreciación es pequeña entonces, la expansión de la oferta de capital será significativa por lo que inducirá una reducción de la tasa de interés importante, lo cual se refleja en una elasticidad tasa de interés - capital grande. Sin embargo, si la tasa de depreciación es muy alta, entonces la expasión de la oferta de capital será reducida y por tanto la tasa de interés caería poco. Este análisis se refleja en el comportamiento decreciente de η_{rk} ante incrementos de δ.

4. La elasticidad de la **tasa de interés** ante la productividad η_{ra} se debilita a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [3]). En este caso el choque de productividad afecta la demanda de capital (más no la oferta de capital). Un incremento de la productividad, incentiva la demanda de capital y por tanto se incrementa la tasa de interés real; es decir, la elasticidad de la tasa de interés a la productividad η_{ra} es positiva tal como se observa en la figura [3] independientemente del valor de δ. Sin embargo, la magnitud de esta elasticidad depende del valor de δ. Cuando la tasa de depreciación se incrementa reduce el stock de capital en "t", lo cual reduce la producción en ese mismo periodo y por tanto hace que la demanda de capital se contraiga ($\widehat{r}_t = \widehat{y}_t - \widehat{k}_t$) mitigando parcialmente el efecto de la productividad. Por ello el valor de η_{ra}, aunque se mantiene positivo, se reduce a medida que se incrementa δ.

[D] Efectos sobre el trabajo y el salario:

1. La elasticidad del **trabajo** ante el capital η_{hk} es negativa y converge a cero a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [4]). El signo de esta elasticidad de obtiene del siguiente análisis: un incremento del capital produce un efecto ingreso (que se refleja en la restricción presupuestaria de la familia). Dicho efecto ingreso permite a la familia incrementar su consumo de ocio y por ende reducir su oferta de trabajo. Como resultado se observa que un incremento del capital conlleva a una reducción del trabajo vía efecto riqueza. Esta relación inversa se observa en el signo de η_{hk}. De otro lado, si la tasa de depreciación se incrementa entonces el stock de capital será menor y por tanto el efecto riqueza será menor. Dado un efecto

Figura 3: Efectos de δ sobre los coeficientes del producto y tasa de interés

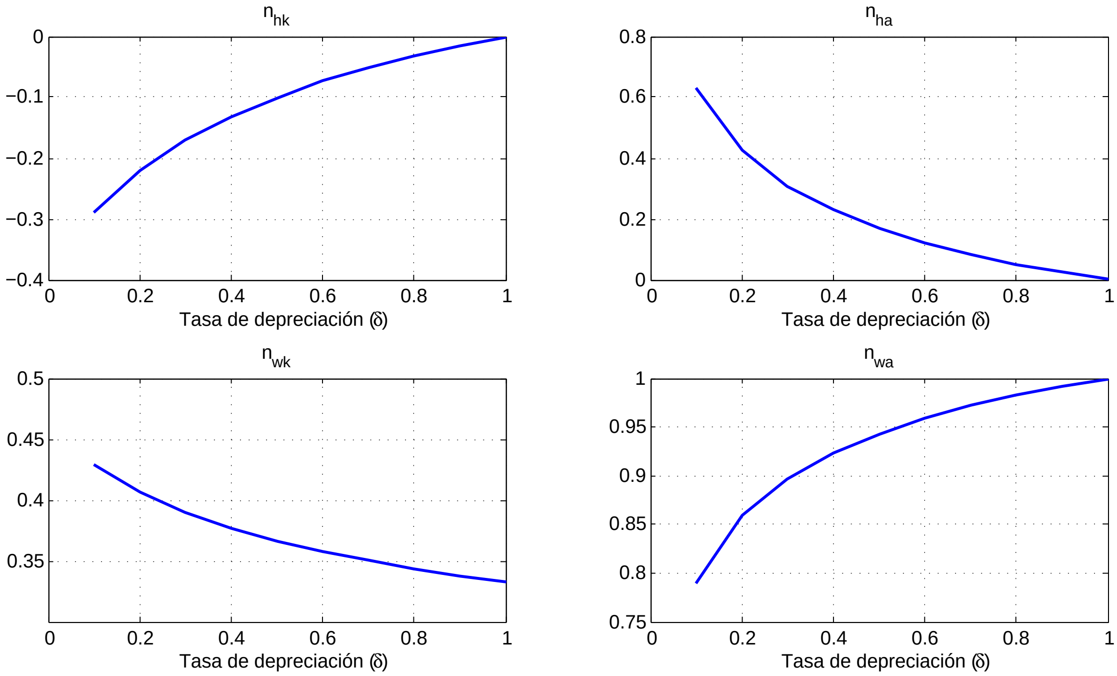


riqueza debilitado, entonces el ocio se expande pero en menor proporción y la oferta de trabajo se reduce pero en menor magnitud. El caso extremo es cuando el efecto riqueza es cero porque la depreciación es total ($\delta = 1$) lo cual lleva a que el ocio y el trabajo no reaccionen. Esto se observa en el comportamiento de η_{hk}.

2. La elasticidad del **salario real** ante el capital η_{wk} se reduce a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [4]). Esta observación amerita dos comentarios: en primer lugar, un incremento del capital incrementa la producción y por ende expande la demanda de trabajo ($\widehat{h}_t = \widehat{y}_t - \widehat{w}_t$). Bajo una oferta de trabajo invariante, el incremento de la demanda de trabajo eleva el salario real. Entonces se puede deducir que un incremento del capital induce un incremento del salario real; es decir, la elasticidad salario real - capital η_{wk} es positiva tal como se observa en la figura [4]. En segundo lugar, la tasa de depreciación influye sobre el stock de capital y por ende sobre la elasticidad salario real - capital η_{wk}. El incremento de capital con un δ mayor inducirá a que dicho incremento sea menor y por tanto la demanda se expandirá pero en menor medida. El resultado de ello es que el salario real se incrementa pero no tan fuerte como antes, lo cual sugiere que la elasticidad salario real - capital η_{wk} sigue positiva pero mas pequeña.

3. La elasticidad del **salario real** ante la productividad η_{wa} se fortalece a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [4]). Además, la elasticidad del **trabajo** ante la productividad η_{ha} es positiva y converge a cero a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [4]). Un choque de productividad afecta directamente la demanda de trabajo e indirectamente la oferta de trabajo. Para un nivel de depreciación dado, se observa que el choque de productividad incrementa la

Figura 4: Efectos de δ sobre los coeficientes del trabajo y salario



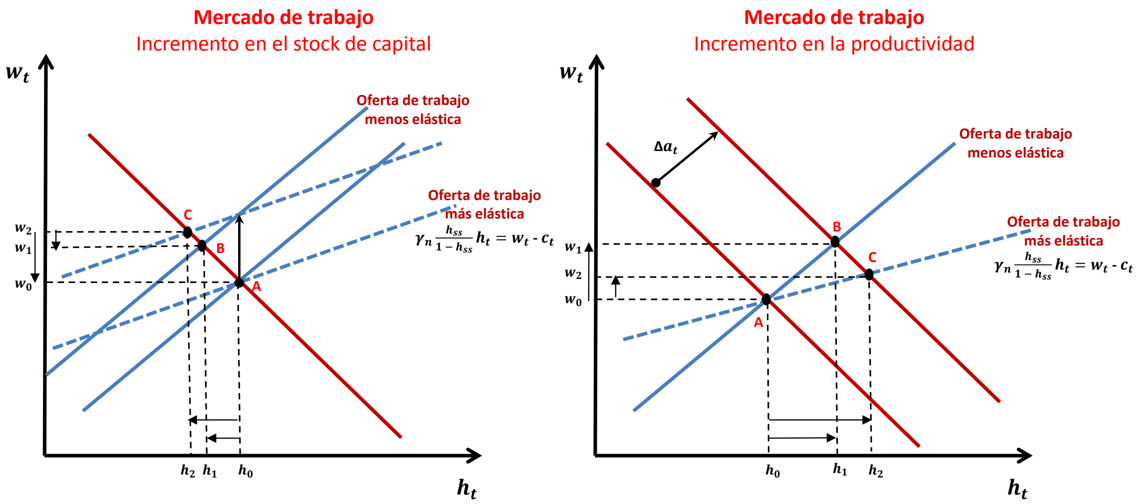
demanda de trabajo y por medio del incremento del consumo se contrae la oferta de trabajo. El resultado es que el trabajo y el salario real de equilibrio se incrementa. En este escenario, un incremento de la depreciación inducirá un mayor consumo debido a que la inversión se reduce por el aumento de la depreciación. Este incremento adicional del consumo reduce la oferta de trabajo, incrementando un poco más el salario real y reduciendo el trabajo. En este nuevo equilibrio el salario real es más alto y el trabajo es mayor que el inicial pero en menor medida. Es decir, la elasticidad salario-productividad se ha incrementado pero la elasticidad trabajo-productividad se ha reducido ante una mayor tasa de depreciación.

3.1.2. Efectos de γ_n

La elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo $(1/\gamma_n)$ o también conocida como la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo tiene un rol importante en la transmisión del choque de productividad. Como se puede observar en la figura [5], mientras más elastica sea la oferta, entonces el choque de productividad que expande la demanda de trabajo afecta en mayor medida el trabajo y en menor magnitud al salario real (ver figura [5], gráfico de la derecha). Esto es importante porque permite obtener mayor volatilidad del trabajo en comparación con el salario, lo cual es avalado por los datos.

En esta sección se analiza la importancia que tiene γ_n en el comportamiento de los coeficientes de las funciones de política y de estado. Cabe mencionar que para leer correctamente los gráficos se considera que a medida que en el eje horizontal se acera a cero

Figura 5: Elasticidad de la oferta de trabajo



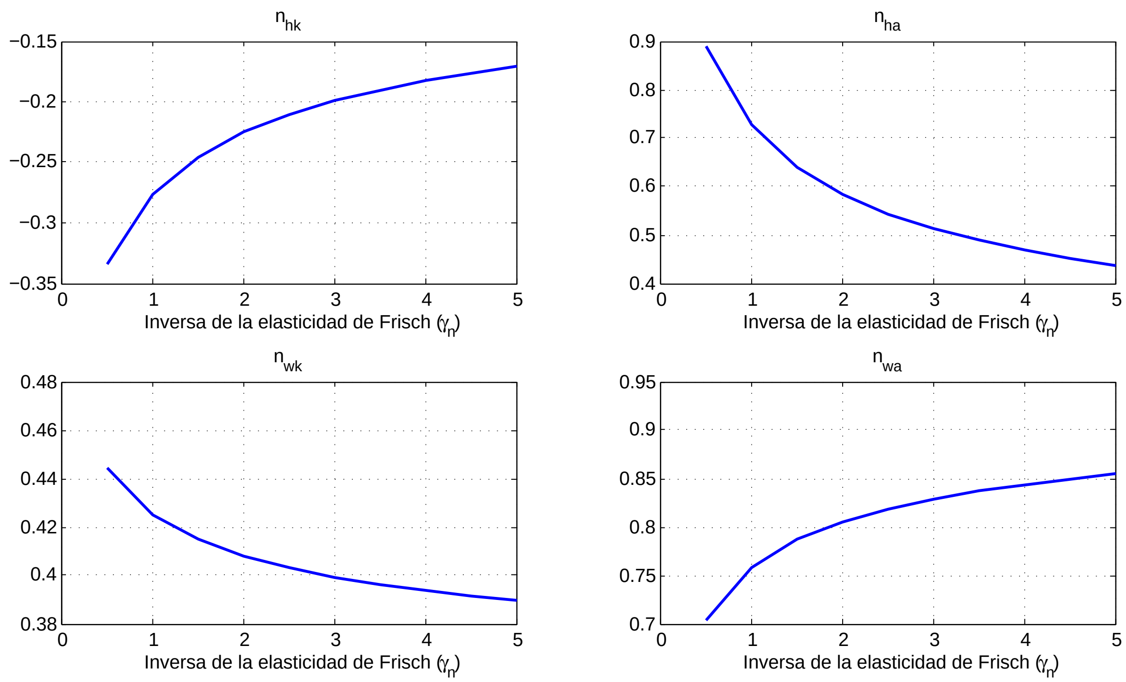
entonces la elasticidad de Frisch aumenta.

[A] Efectos sobre el trabajo y el salario:

1. La elasticidad del **trabajo** ante el capital η_{hk} es negativa y aumenta a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [6]). Además, la elasticidad del **salario real** ante el capital η_{hk} es positiva y aumenta a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [6]). Como se mencionó en párrafos previos, un incremento del capital produce un efecto riqueza, por medio del incremento de los ingresos de la familia, que permite aumentar el consumo de ocio y como consecuencia reducir la oferta de trabajo. Esta reducción, bajo la consideración que la demanda de trabajo no se mueve, produce un alza en el salario real y una reducción en el empleo. Ambos efectos se reflejan en el signo negativo de η_{hk} y en el signo positivo de η_{wk}. En el caso que la oferta de trabajo sea más elástica, entonces el mismo incremento del capital produce que el nuevo equilibrio refleje un mayor incremento del salario real y una reducción mayor del empleo; es decir, η_{wk} y η_{wk} se hacen más fuertes cuando se incrementa la elasticidad. Esto se debe a que el consumidor está más dispuesto a sustituir trabajo hoy por mañana, esta disposición hace que se desprenda del ocio de mañana por más ocio de hoy y por tanto una reducción mayor en las horas trabajadas hoy (ver figura [5], gráfico de la izquierda).

2. La elasticidad del **trabajo** ante la productividad η_{ha} es positiva y aumenta a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [6]). Además, la elasticidad del **salario real** ante la productividad η_{ha} es positiva y disminuye a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [6]). Un incremento temporal en la productividad efecta directamente la demanda de trabajo hacia el alza. Esta expansión se refleja en un aumento del salario real y el empleo, lo cual justifica el signo positivo de η_{ha} y η_{wa}. Sin embargo, la elasticidad de la oferta de trabajo controla la magnitud de η_{ha} y η_{wa}. En el escenario que la oferta de trabajo es muy elástica, un incremento de la productividad producirá que en el nuevo equilibrio el trabajo

Figura 6: Efectos de γ_n sobre los coeficientes del trabajo y salario



reaccione más fuertemente que el salario. Esto se debe a que la familias está mucho más dispuesta a sacrificar ocio hoy si su precio se incrementa ($\uparrow \widehat{w}_t$), por tanto bajo una alta elasticidad la familia reduce fuertemente su ocio e incrementa fuertemente su número de horas trabajadas (ver figura [5], gráfico de la derecha).

[B] Efectos sobre el consumo e inversión:

1. La elasticidad del **consumo** ante el capital η_{ck} es positiva y se debilita a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [7]). Un incremento del stock de capital de la economía, produce que las familias incrementen sus ingresos por medio del alquiler del capital ($\widehat{r}_t\widehat{k}_t$); por otro lado, la oferta de bienes se incrementa por medio de la función de producción. Este incremento de los ingresos lleva a la familia a aumentar el consumo, lo cual se observa en el signo positivo de η_{ck}. Adempas, la maginitud de η_{ck} es afectado por la elasticidad de la oferta de trabajo. El incremento del capital induce a que la familia reduzca su nivel de horas trabajadas afectando negativamente los ingresos. Este efecto mitiga parciamente el efecto inicial del incremento del capital. Mientras más fuerte sea la elasticidad de la oferta de trabajo, más fuerte será la reducción de ingresos por el lado laboral y por tanto mitigará en mayor medida el incremento inicial del capital. El resultado será que la elasticidad consumo-capital será menor a medida que γ_n sea más fuerte, tal como se observa en la figura [7].

2. La elasticidad de la **inversión** ante el capital η_{ik} es negativa y se fortalece a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [7]). En la ley de movimiento del capital existen dos variables de control: $\widehat{k}_{t+1}$ y $\widehat{i}_t$. Usualmente, en la optimización

una de estas dos variables es eliminada ya que dependen una de otra. La ley de movimiento del capital usualmente se escribe como $\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$; sin embargo, se puede reescribir esta ecuación de la siguiente manera: $\delta\widehat{i}_t = \widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t$. Bajo esta última forma se observa que un incremento del stock de capital $\widehat{k}_t$ incentiva a la familia a reducir su inversión. A mayor elasticidad de la oferta de trabajo, un incremento del stock de capital de hoy aumenta en menor medida el stock de capital de mañana, lo cual se observa en el comportamiento de η_{kk}. Este efecto incentiva que la inversión se debilite; por tanto, a medida que γ_n se fortalece η_{ik}.

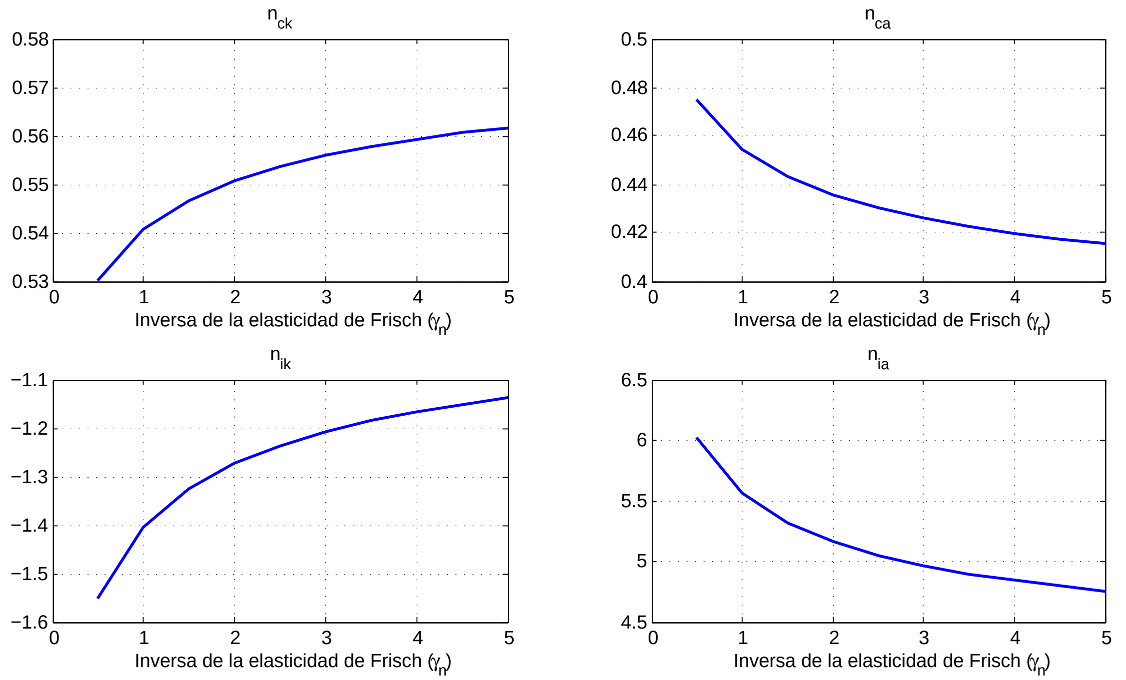
3. La elasticidad del **consumo** η_{ca} y de la **inversión** η_{ia} ante la productividad son positivas y se fortalecen a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [7]). Un choque de productividad genera un efecto riqueza, el cual es orientado al consumo y ahorro. Como se mencionó en el análisis de δ, la familia representativa encuentra óptimo suavizar su consumo ante choques transitorios y trasladar gran parte de su efecto al ahorro (inversión). Este comportamiento de la familia hace que el consumo y la inversión se incremente, pero este último en mayor proporción. Esto se refleja en el signo positivo de η_{ca} y η_{ia}, y en que η_{ia} es mayor que η_{ca} para todos los valores de γ_n (como también para los valores de δ). Cabe mencionar que la magnitud de ambas elasticidades es moderada por la elasticidad de la oferta de trabajo ($1/\gamma_n$). Cuando dicha elasticidad es mayor, entonces la familia reduce más su ocio de hoy (más trabajo) por más ocio mañana ante un choque de productividad. Este incremento de las horas trabajadas induce a la familia a tener más recursos, los cuales son direccionados al consumo y a la inversión. En el caso que la elasticidad de la oferta de trabajo es pequeña, las horas trabajadas también se incrementan pero en menor magnitud, lo cual permite la expansión del consumo e inversión pero en menor magnitud que el caso de una elasticidad de oferta de trabajo mayor.

[C] Efectos sobre el producto y la tasa de interés:

1. La elasticidad del **producto** con respecto al capital η_{yk} es positiva y se reduce a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver la figura [8]). Un incremento del capital, por medio de la función de producción, eleva la producción en "t", lo cual se refleja en el signo positivo de η_{yk}. De otro lado, el incremento del capital eleva lo ingresos de las familias, las cuales al sentirse más "ricas", deciden incrementar su consumo de ocio y reducir su oferta de trabajo. Esta contracción de la oferta de trabajo induce un efecto negativo sobre la función de producción mitigando parcialmente el efecto positivo del incremento del capital. La magnitud de este efecto negativo depende de la elasticidad de la oferta de trabajo. Si la oferta de trabajo es más elástica, entonces el trabajo de equilibrio seria mucho menor y por ende el efecto negativo sobre la producción sería más grande y mitigaría con más fuerza el efecto positivo inicial del capital. Todo esto se refleja en que η_{yk} sería más pequeña a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo sea mayor.

2. La elasticidad de la **tasa de interés** con respecto al capital η_{rk} es negativa y se incrementa a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver la figura [8]). Un incremento del stock de capital en "t" significa que la oferta del capital se expande. En este escenario, y bajo una demanda de capital invariante, la tasa de interés de equilibrio se contre. Este comportamiento se refleja en el signo negativo de η_{rk}. Un segundo efecto de este incremento en el stock de capital es sobre la demanda de

Figura 7: Efectos de γ_n sobre los coeficientes del consumo e inversión

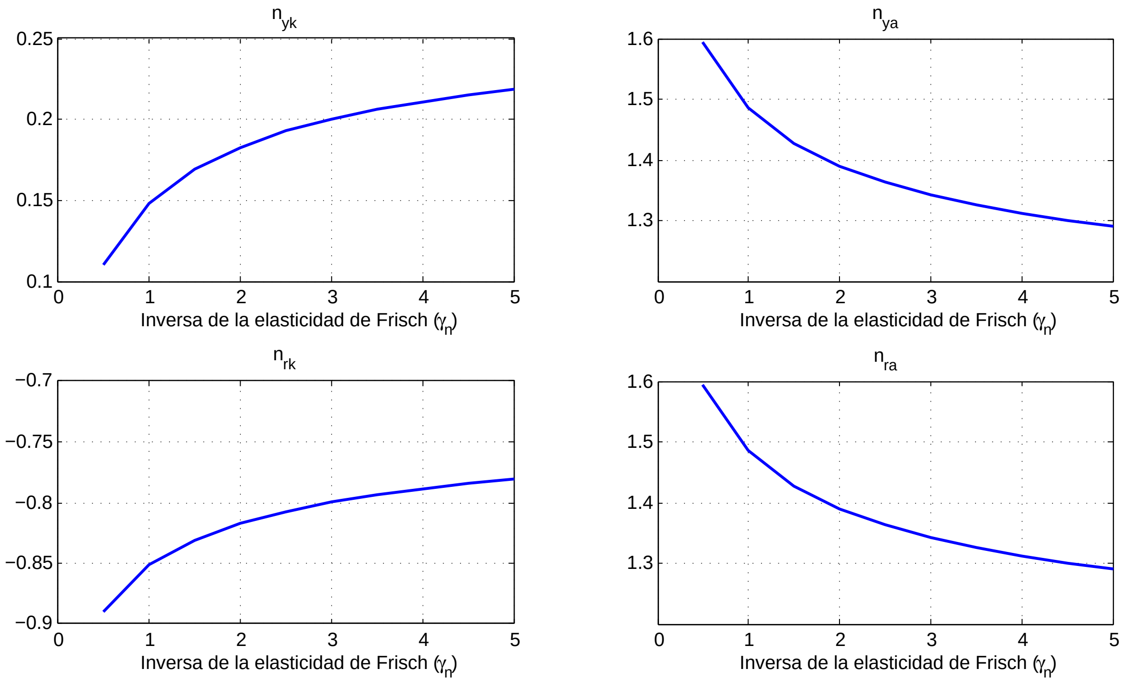


capital, la cual se expande por medio del aumento del producto: el capital aumenta, entonces incrementa el producto y por tanto eleva la demanda de capital. Este último movimiento mitiga parcialmente la reducción inicial de la tasa de interés. Uno de los parámetros que controla la expansión de la demanda de capital es la elasticidad de la oferta de trabajo $(1/\gamma_n)$. Del párrafo previo se sabe que η_{yk} es menor a medida que $1/\gamma_n$ se incrementa. Entonces, si la elasticidad de la oferta de trabajo es grande, el movimiento de la demanda de capital será pequeño porque η_{yk} es reducido y como consecuencia el efecto mitigador sobre la reducción de la tasa de interés será pequeño. Todo esto indica que a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo es fuerte entonces η_{rk} será también fuerte tal como se observa en la figura [8].

3. La elasticidad de **producto** con respecto a la productividad η_{ya} es positiva y se incrementa a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver la figura [8]). Un incremento en la productividad expande de manera paralela la función de producción log-lineal, lo cual sugiere el signo positivo de η_{ya}. Existe un efecto adicional cuando se considera la elasticidad de la oferta de trabajo γ_n. Cuando la oferta de trabajo es más elástica, entonces el número de horas trabajadas de equilibrio son mayores que en el caso que dicha oferta tenga menor elasticidad. Este incremento mayor en el trabajo influye positivamente sobre el producto y fortaleciendo así η_{ya}.

4. La elasticidad de la **tasa de interés** con respecto a la productividad η_{ra} es positiva y se incrementa a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver la figura [8]). El signo positivo se debe a que un incremento de la productividad incentiva la demanda de bienes de capital, lo cual bajo una oferta de capital perfectamente inelastica empuja al alza la tasa de interés real. De otro lado, la magnitud de η_{ra}

Figura 8: Efectos de γ_n sobre los coeficientes del producto y tasa de interés



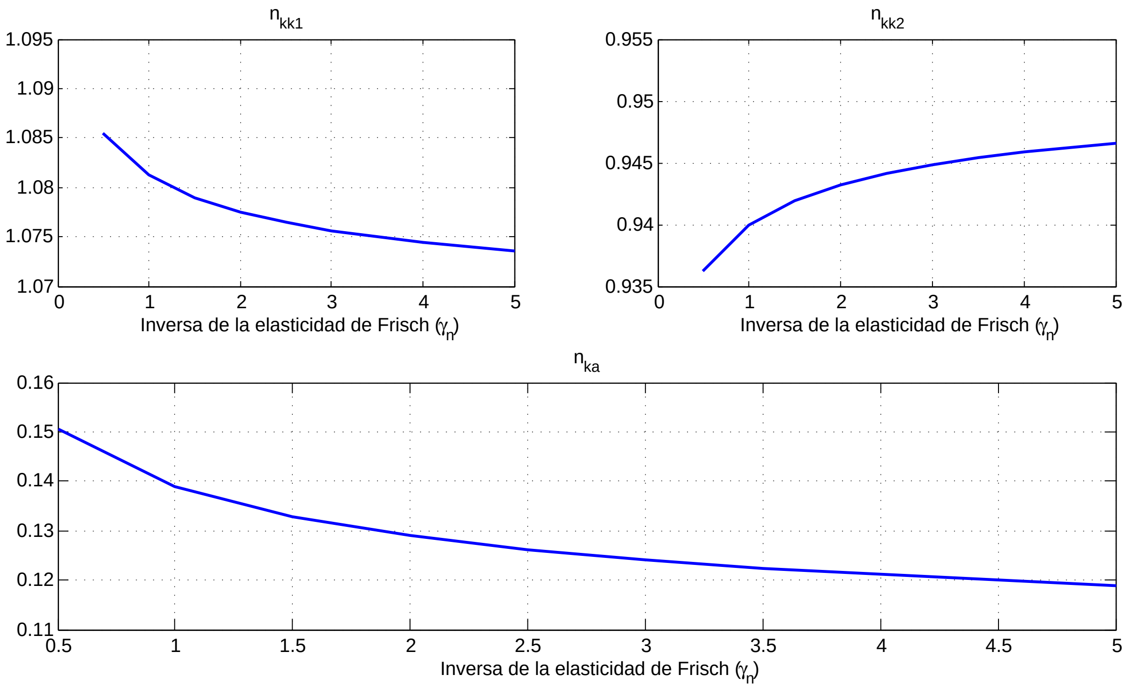
está influenciado por γ_n. Bajo el escenario de una oferta de trabajo muy elástica, la demanda de capital sufrirá una expansión adicional por el efecto del incremento del trabajo en la función de producción. Dado que γ_n controla dicho incremento del trabajo, entonces a mayor γ_n, mayor horas trabajadas y por tanto el efecto positivo sobre la demanda de capital será mayor. Este movimiento adicional de la demanda de capital fortalece más el incremento de la tasa de interés. Por tanto, a mayor γ_n, mayor η_{ra} tal como se observa en la figura [8].

[D] Efectos sobre el capital:

1. La elasticidad del capital en "t+1" con respecto al capital en "t" η_{kk} es positiva y se reduce a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo es mayor (ver la figura [9]). Por la ecuación del movimiento del capital ($\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$) se infiere que un incremento del capital de hoy puede influenciar al capital de mañana por dos vías: la primera de manera directa $(1-\delta)\widehat{k}_t$, y la segunda de manera indirecta por medio de la inversión $\delta\widehat{i}_t$. El efecto de este segundo elemento sobre el capital de mañana está condicionado al valor de la elasticidad de la oferta de trabajo. Como se sabe de la figura [7], η_{ik} es negativo y se fortalece a medida que $1/\gamma_n$ se incrementa. En este escenario se aprecia que ante un incremento del stock de capital, el efecto de la inversión sobre $\widehat{k}_{t+1}$ mitiga parcialmente el efecto positivo de $\widehat{k}_t$. En base a todo lo anterior, a medida que $1/\gamma_n$ se fortalece, η_{kk} debilita.

2. La elasticidad del capital en "t+1" con respecto a la productividad en "t" η_{ka} es positiva y se fortlece a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo es mayor (ver la figura [9]). Un choque de productividad impacta positivamente sobre la inversión,

Figura 9: Efectos de γ_n sobre los coeficientes del capital



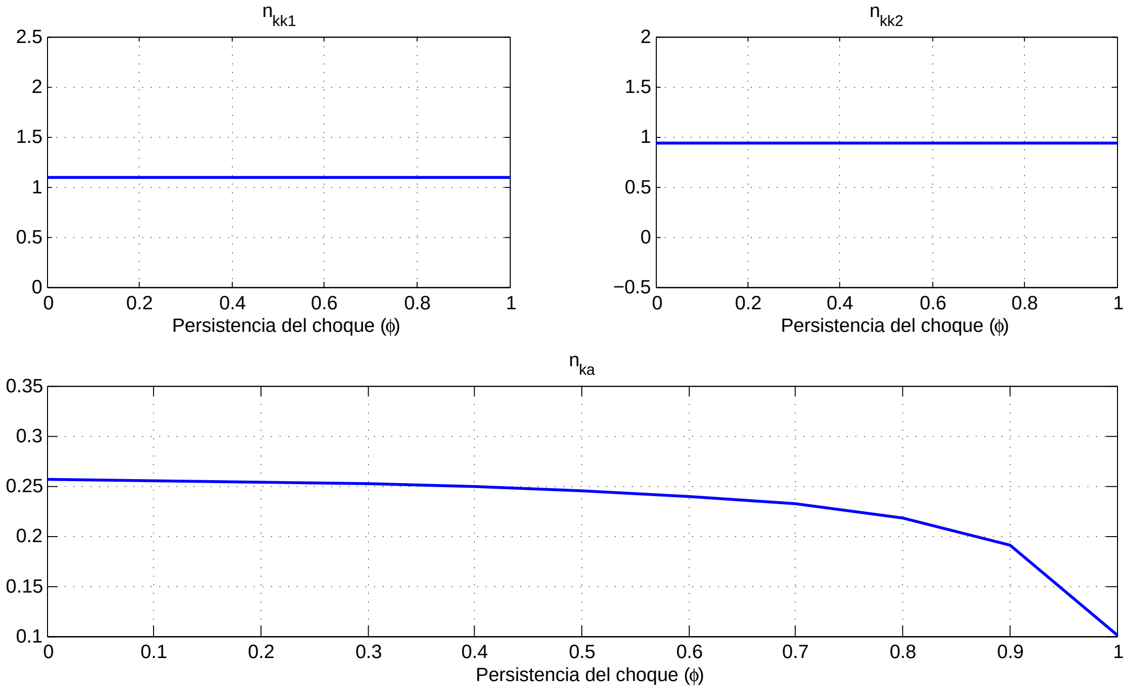
tal como se observa en la figura [7], lo cual a su vez influye sobre $\widehat{k}_{t+1}$ por medio de la ecuación del movimiento del capital. La figura [7] sugiere que η_{ia} se fortalece a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo se incrementa. Debido a que la inversión afecta directamente al capital de mañana, entonces el mismo comportamiento de η_{ia} se traslada a η_{ka}.

3.1.3. Efectos de ϕ

La persistencia del choque de productividad ϕ es importante en la supervivencia temporal de los efectos del choque inicial. Dada la naturaleza de la productividad, la cual se comporta como un AR(1): $\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$, una alta persistencia permite que $\widehat{a}_t$ se mantenga por encima de su estado estacionario por más tiempo, si el choque es positivo, afectando a la economía por más tiempo. Existen dos casos extremos: por un lado, persistencia igual a cero, lo cual indica que el choque solo vive un periodo; por otro lado, persistencia igual a uno, lo cual indica que el choque es permanente; es decir, el efecto del choque se mantiene en todos los periodos. En esta sección se analiza los efectos de la persistencia sobre las elasticidades de la solución considerando que el choque es temporal; es decir, que $\phi \in [0, 1[$.

Una de las primeras conclusiones que se desprende de las figuras [10] al [13] es que la persistencia no afecta las elasticidades asociadas al stock del capital $\widehat{k}_t$. Por ejemplo, η_{kk}, η_{ck} y η_{ik} se mantienen invariantes ante distintos valores de ϕ. Esto se debe a que la persistencia solo afecta el comportamiento de la productividad y por tanto es de esperar que diho parámetro influya en los coeficientes de la solución asociadas a la productividad $\widehat{a}_t$. Por ejemplo, η_{ka}, η_{ca} y η_{ia} muestran sensibilidad ante distintos valores de la persistencia.

Figura 10: Efectos de ϕ sobre los coeficientes del capital



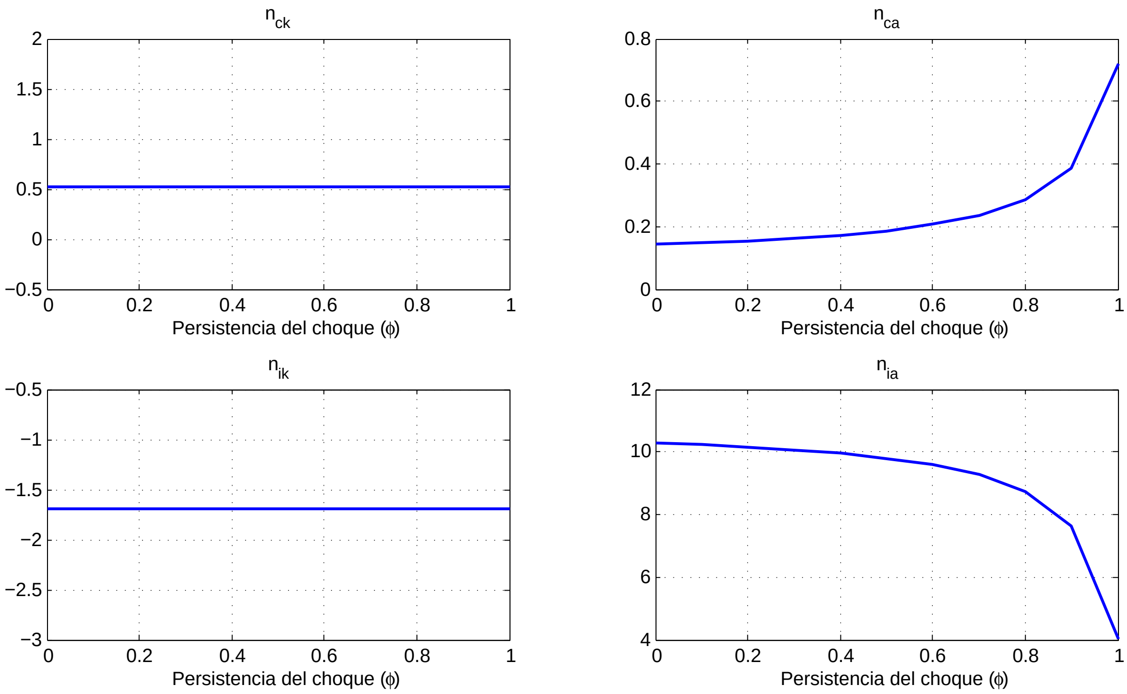
[A] Efectos sobre el capital:

1. La elasticidad del **capital** en "t+1" con respecto a la productividad η_{ka} es positiva y decreciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [10]). Un choque de productividad influye positivamente sobre $\widehat{k}_{t+1}$ por medio de la inversión. Dado que un choque de productividad produce un efecto riqueza, la familia representativa decide incrementar el consumo y la inversión, la cual incrementa el capital de mañana. Es por ello que el signo de η_{ka} es positivo. De otro lado, la familia siente que el choque es más "permanente" a medida que la persistencia es más cercana a uno, por ello decide incrementar más su consumo que su inversión, lo cual se observa en la figura [11]. Este incremento cada vez menor de la inversión a medida que la persistencia se fortalece produce que el capital de mañana se incremente pero bajo el mismo patrón; es decir, cada vez menos cuando la persistencia se incrementa. Este comportamiento se observa en η_{ka}.

[B] Efectos sobre el consumo e inversión:

1. La elasticidad del **consumo** con respecto a la productividad η_{ca} es positiva y creciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [11]). Por el contrario, la elasticidad de la **inversión** con respecto a la productividad η_{ia} es decreciente, aunque positiva como η_{ca} (ver figura [11]). El choque de productividad produce un efecto riqueza en la familia. Este efecto riqueza se debe a que la demanda de capital y la demanda de trabajo se incrementa y dado que la familia recibe ingresos por ambos factores, entonces su nivel de ingresos se eleva. Este mayor

Figura 11: Efectos de ϕ sobre los coeficientes del consumo e inversión

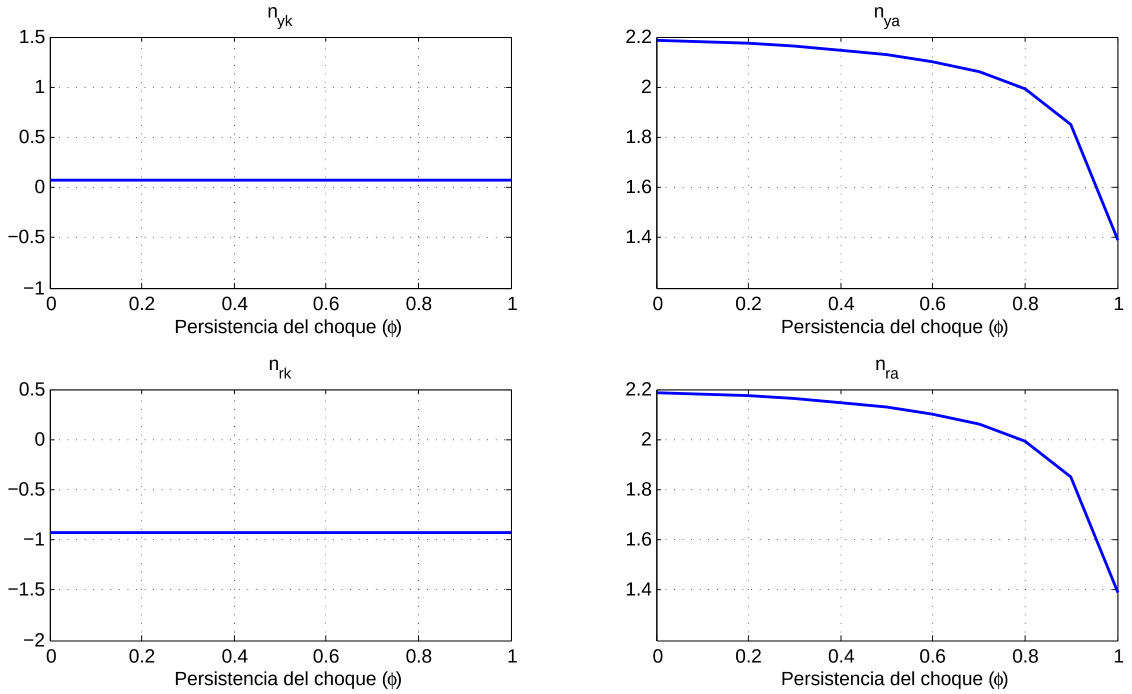


ingreso es destinado al consumo e inversión, los cuales aumentan. Es por ello que ambas elasticidades η_{ca} y η_{ia} tienen el mismo signo positivo. Además, la magnitud de estas elasticidades está influenciada por el valor de ϕ. A medida que ϕ se acerca a uno, la familia percibe que el choque de productividad es más "permanente"; es decir, que sus efectos se mantienen en el tiempo. En este escenario, la familia encuentra óptimo orientar más recursos al consumo que a la inversión porque su patrón de ingreso ha cambiado casi permanentemente. Por tanto, la elasticidad del consumo es alto cuando la persistencia del choque es alta, mientras que la elasticidad de la inversión es baja en este mismo escenario. En el caso que la persistencia tiende a cero; es decir, que el choque vive solo un periodo y sus efectos son "temporales", entonces la familia encuentra óptimo orientar los recursos al ahorro (inversión) con el fin de suavizar su consumo. Por tanto, en este escenario se observa que la elasticidad del consumo es baja, mientras la elasticidad de la inversión es alta.

[C] Efectos sobre el producto y tasa de interés:

1. La elasticidad del **producto** con respecto a la productividad η_{ya} es positiva y decreciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [12]). El choque de productividad afecta a la producción directamente por $\widehat{a}_t$ e indirectamente por el trabajo $\widehat{h}_t$. Esto se observa en la forma funcional de la producción: $\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t$. Para entender cómo ϕ influye sobre η_{ya} es necesario analizar cómo el trabajo responde ante este parámetro. Se sabe de la figura [13] que una mayor persistencia del choque de productividad induce a la familia a incrementar su ocio y reducir el trabajo porque la familia siente que la productividad tiene

Figura 12: Efectos de ϕ sobre los coeficientes del producto y tasa de interés



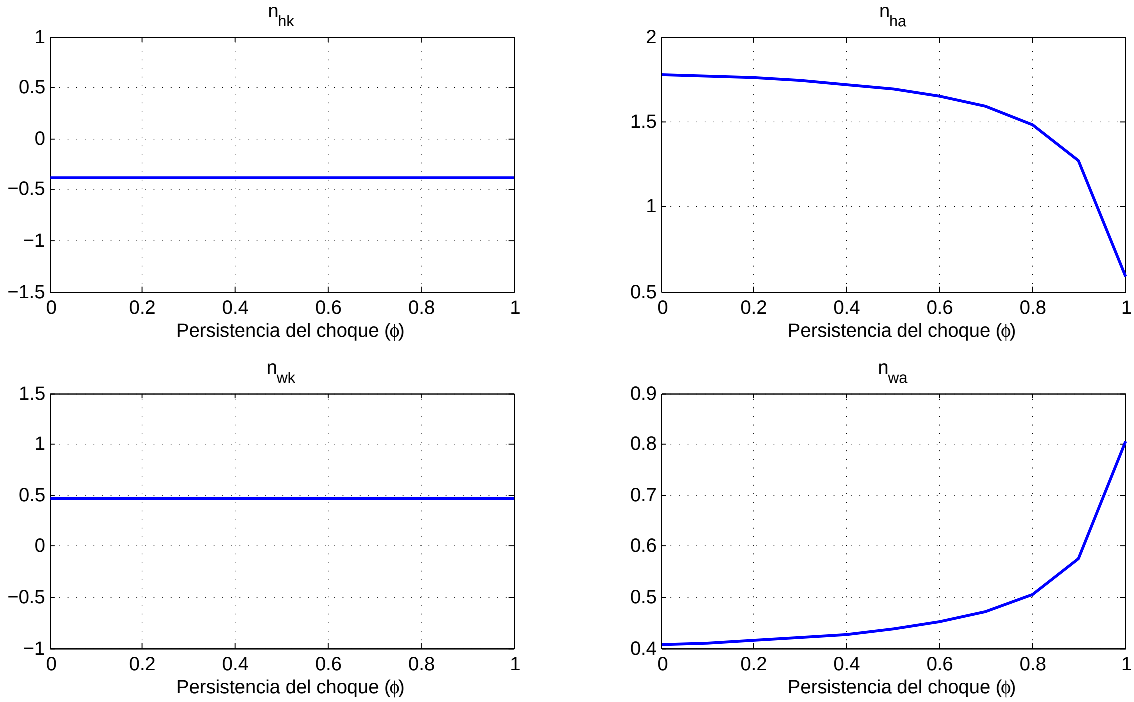
efectos permanentes. Entonces, a medida que se incrementa ϕ la familia incrementa su trabajo ante un choque de productividad pero en menor medida. Por lo tanto, a medida que se incrementa la persistencia, el producto aumenta pero cada vez en menor medida porque el trabajo aumenta pero también en menor medida.

2. La elasticidad de la **tasa de interés** con respecto a la productividad η_{ya} es positiva y decreciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [12]). El choque de productividad eleva la demanda de capital y bajo una oferta inelástica de capital, incrementa la tasa de interés de equilibrio. Debido a que la demanda de capital $\widehat{r}_t = \widehat{y}_t - \widehat{k}_t$ depende del producto, entonces el patrón del movimiento del producto ante un choque de productividad es totalmente trasladada al comportamiento de la demanda. Por ejemplo, el párrafo anterior indica que η_{ya} es decreciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa. Este comportamiento es trasladado a la demanda de capital que en conjunto con la oferta de capital permiten que la elasticidad tasa de interés - productividad también sea decreciente en ϕ.

[D] Efectos sobre el trabajo y el salario:

1. La elasticidad del **trabajo** con respecto a la productividad es positiva y se reduce a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [13]). Además, la elasticidad del **salario** con respecto a la productividad es positiva y se fortalece a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [13]). Un choque de productividad tiene dos efectos en el mercado laboral: el primero es directamente sobre la demanda, la cual se expande; el segundo, es indirectamente

Figura 13: Efectos de ϕ sobre los coeficientes del trabajo y salario



sobre la oferta por medio del incremento del consumo. Por un lado, la demanda se expande y por otros lado la oferta se constrae.

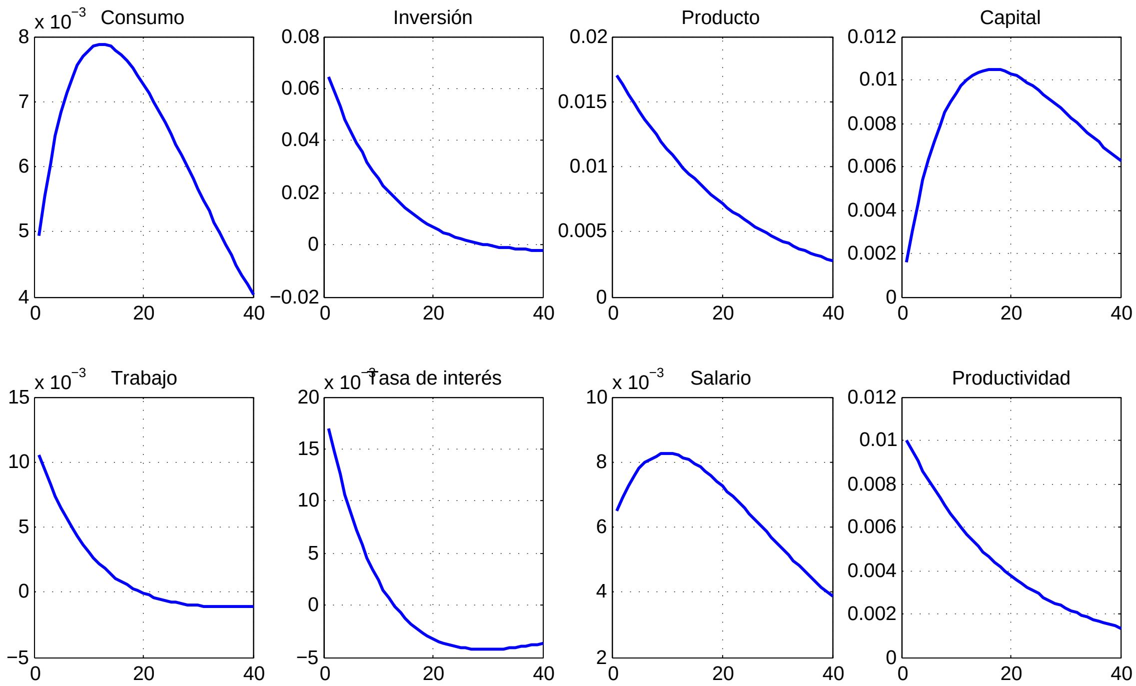
3.2. Funciones impulso-respuesta

La función impulso-respuesta es la reacción de las variables endógenas ante un choque. Esta reacción tiene una magnitud y un tiempo de vida. Cabe mencionar que cada elemento de la función impulso-respuesta representa un equilibrio y por tanto una respuesta óptima del agente representativo. En esta sección se considera que el choque es el de productividad.

3.2.1. ¿Cómo reacciona la economía ante un choque de productividad?

- El choque de productividad se prodice en $t = 0$, en este periodo ϵ_0 toma el valor de su desviación estándar $\sigma = 0.763$. Esto lleva a que la productividad se incremente ($\uparrow \widehat{a}_t$).
- El incremento de la productividad tiene dos efectos: el primero es el incremento de la función de producción $\uparrow \widehat{y}_t = \uparrow \widehat{a}_t + \alpha \widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t$. El segundo es el incremento de la demanda en el mercado de factores (del capital y del trabajo).
- En el caso del mercado de trabajo, el incremento de la demanda eleva el salario real y el el número de horas de trabajo de equilibrio. Notar que a medida que la oferta es más elastica ($\downarrow \gamma_n$), el impacto del movimiento de la demanda es mayor.

Figura 14: Campbell (1994) con trabajo variable: choque de productividad



Nota: Este gráfico se obtiene del m−file "Analisis_sensibilidad_irf.m"

- En el mercado de bienes de capital se observa que el incremento de la demanda se traslada completamente a la oferta. Esto se debe a que la oferta es perfectamente inelastica (invariante con la tasa de interés). Además, este incremento en la demanda eleva la tasa de interés.
- El mayor salario ($\uparrow w_t$) y el incremento de la tasa de interés ($\uparrow r_t$) incrementa el ingreso de la familia, lo cual lleva a incrementar el consumo y la inversión.

3.3. Comparación modelo teórico con los datos

3.3.1. ¿Se necesita que el choque sea significativo para que el modelo replique los datos?

La respuesta a esta pregunta, *a priori*, es sí. El modelo RBC por lo general necesita que la magnitud del choque de productividad sea significativo (alrededor de 0.7 %). Sin embargo, esta dependencia se reduce cuando se considera la utilización variable del capital. Tal como lo señala King y Rebelo (1999), un modelo RBC con utilización de capital requiere un choque de productividad de 0.1 % aproximadamente para acercarse a los datos. En los párrafos siguientes se describe como la magnitud del choque tiene implicancias sobre la capacidad del modelo en acercarse a los datos. En principio con un choque de 0.4 % el modelo se encuentra muy lejos de los datos, mientras que con un choque de 0.7 % el modelo se comporta mejor pero con ciertas deficiencias. Además, se observa que la correlación del producto con las vriables del modelo y la autocorrelación de primer orden no dependen de la magnitud del choque.

En el cuadro [11] se muestra tres estadísticos (desviación estándar, correlación y autocorrelación de primer orden) del componente cíclico de los datos y del modelo para cada variable. Los estadísticos del modelo se han calculado suponiendo cuatro valores del choque de productividad (σ). La idea detrás de esto es evaluar si el modelo necesita un choque "significativo" para replicar los datos. Con esto en mente, se procede a describir las conclusiones que emergen de este cuadro.

[A] Desviación estándar: en primer lugar, se observa que a medida que el choque es más fuerte (de $\sigma = 0.004$ a 0.015), la desviación estándar de las variables se incrementa. Por ejemplo, la desviación estándar del consumo para $\sigma = 0.004$ es igual a 0.31 %, mientras que para $\sigma = 0.015$ es igual a 1.16 %. En segundo lugar, bajo una magnitud pequeña del choque de productividad, el modelo se queda muy lejos de lo observado en los datos. Por ejemplo, para $\sigma = 0.004$ que la desviación estándar del consumo es 0.31 % mientras que los datos indican que dicho estadístico es igual a 1.27 %. De igual forma para la inversión, el modelo se queda lejos de lo encontrado en los datos (3.37 % en el modelo vs 5.30 % en los datos). Este mismo comportamiento se observa en todas las variables.

En tercer lugar, el valor de $\sigma = 0.007$ ha sido utilizado por Prescott (1986), un valor similar ($\sigma = 0.00712$) por Hansen (1985) y por King y Rebelo (1999) ($\sigma = 0.0072$). Bajo esta magnitud del choque, el modelo mejora en acercarse a los datos (en comparación con $\sigma = 0.004$), por ejemplo la desviación estándar de la inversión que brinda el modelo es 5.9 %, lo cual es más cercano a los datos (5.30 %), de la misma manera se observa para el producto y del salario real. Sin embargo, los resultados del modelo para el consumo, el trabajo y la tasa de interés aún están lejos de lo observado. Por ejemplo, la desviación estándar del consumo pasa de 0.31 % a 0.54 % cuando el choque se incrementa de 0.004 a 0.007, pero aún está por debajo del valor empírico 1.35 %. Lo mismo se observa para el trabajo, el modelo indica que la desviación estándar es 0.96 %, mientras los datos sugieren que dicho estadístico es igual a 1.79 %. En cuanto a la tasa de interés, el modelo sobreestima fuertemente el estadístico (1.58 % vs 0.30 %). En cuarto lugar, el valor de $\sigma = 0.01$ es considerado por Campbell (1994). Bajo este valor el modelo sobreestima el estadístico en cuatro variables: la inversión, el producto, la tasa de interés y el salario real. Por ejemplo, la desviación de la inversión llega a ser 8.42 % superando largamente lo observado (5.30 %). Sin embargo, se observa que en el consumo y el trabajo el modelo se acerca más a los datos, pero aún por debajo. Por ejemplo, la desviación estándar del consumo se incrementa de 0.54 % a 0.77 % cuando el choque pasa de 0.007 a 0.010, pero aún está por debajo de lo observado (1.35 %).

En quinto lugar, se observa que para un choque de productividad mayor ($\sigma = 0.015$) los resultados del modelo sobreestiman largamente lo encontrado en los datos excepto para el consumo. Por ejemplo, para el caso de la inversión, los datos indican que su desviación estándar es 5.30 %, mientras que el modelo indica que es 12.64 %. De la misma forma para el producto, el modelo sugiere que la desviación estándar es casi el doble de lo encontrado en los datos (3.33 % vs 1.72 %). Solo en el consumo, el modelo se acerca mejor a los datos (1.16 % en el modelo vs 1.35 % en los datos). Finalmente, es importante mencionar que el impacto del choque de productividad está sujeto a la parametrización del modelo.

Cuadro 11: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

Variable (x_t)	Desviación Estándar (%)					Corr(PBI_t, x_t)		Autocorrelación	
	Datos	Modelo				Datos	Modelo	Datos	Modelo
$\sigma =$		0.004	0.007	0.01	0.015		0.004 al 0.015		0.004 al 0.015
Consumo	1.35	0.31	0.54	0.77	1.16	0.88	0.8851	0.80	0.8191
Inversión	5.30	3.37	5.9	8.42	12.64	0.80	0.9856	0.87	0.7013
Producto	1.81	0.89	1.56	2.22	3.33	1	1	0.84	0.7162
Capital		0.29	0.51	0.73	1.09		0.3915		0.9572
Trabajo	1.79	0.55	0.96	1.37	2.06	0.88	0.9736	0.88	0.6995
Tasa de interés	0.30	0.9	1.58	2.26	3.39	-0.35	0.9477	0.60	0.7006
Salario real	0.68	0.38	0.66	0.94	1.41	0.12	0.9423	0.66	0.7826

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de King y Rebelo (1999) y todas las variables están en logarítmo natural, excepto la tasa de interés. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una sola simulación. Estos valores se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log7.mod".

[B] Correlación con el PBI: en primer lugar, la correlación del producto con las demás variables no depende de la magnitud del choque de productividad; por tanto, las diferencias que se podría encontrar entre lo observado y lo inferido por el modelo no corresponde a la magnitud del choque sino a la parametrización del modelo y los supuestos subyacentes. En segundo lugar, del cuadro [11] se observa que la correlación que brinda el modelo es mayor en todas las variables con respecto a lo sugerido por los datos. Por ejemplo, la correlación del producto con el consumo en los datos es de 0.88, mientras que el modelo indica que este es igual a 0.8851. De igual forma para la inversión (0.80 en los datos vs 0.9856 en el modelo). Esta sobreestimación del modelo se observa en la correlación del producto con todas las variables.

En tercer lugar, los datos indican que la tasa de interés es contraciclica ($corr(y_t, r_t) < 0$); sin embargo, el modelo infiere que la tasa de interés es altamente procíclica ($corr(y_t, r_t) = 0.9477$). En cuarto lugar, los datos sugieren que el salario real tiene una correlación muy pequeña con el producto; sin embargo, el modelo sugiere que dicho estadístico es muy cercano a uno. Estas dos debilidades del modelo en replicar los datos, por lo general, son transversales a los modelos RBC y representan dos principales críticas a esta escuela.

[C] Autocorrelación de primer orden: en primer lugar, la autocorrelacón de primer orden, al igual que la correlación del producto con las variables del modelo, no depende de la magnitud del choque de productividad. En segundo lugar, el modelo subestima la autocorrelación del producto (0.7013 vs 0.87). Esto representa una de las principales críticas al modelo RBC y ha sido enfatizada por varios autores entre los cuales se encuentra Cogley y Nason (1995). En terer lugar, el modelo sobreestima la autocorrelación del salario real y subestima la autocorrelación del trabajo.

3.3.2. ¿Se necesita que la oferta de trabajo sea muy elástica para que el modelo replique los datos?

La respuesta a esta pregunta es sí. El modelo RBC necesita un mecanismo de transmisión fuerte que traslade los efectos del choque a las variables endógenas. En este contexto,

Cuadro 12: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

Variable (x_t)	Desviación Estándar (%)				
	Datos	Modelo			
Elasticidad Frisch ($1/\gamma_n$)=		0.2	1	2	5
Consumo	1.35	0.63	0.7	0.74	0.78
Inversión	5.30	6.21	7.25	7.84	8.59
Producto	1.81	1.69	1.94	2.08	2.26
Capital		0.54	0.63	0.68	0.74
Trabajo	1.79	0.57	0.95	1.17	1.44
Tasa de interés	0.30	1.72	1.98	2.12	2.3
Salario real	0.68	1.14	1.04	0.99	0.92

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de King y Rebelo (1999) y todas las variables están en logarítmo natural, excepto la tasa de interés. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una sola simulación. Estos valores se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log8.mod".

la elasticidad de la oferta de trabajo se coloca como uno de los principales mecanismos de transmisión. Como se observa en los cuadros [12] y [13], a mayor elasticidad de la oferta de trabajo, los efectos del choque inicial son amplificados influyendo sobre los estadísticos del modelo. Dichos estadísticos se acercan más a lo observados en los datos a medida que la oferta de trabajo es más elástica. La dependencia del modelo RBC con respecto a la elasticidad de la oferta de trabajo fue duramente criticada debido a que los estudios microeconómicos indicaban que dicha elasticidad es pequeña, lo cual contrastaba con lo supuesto por la escuela RBC. Sin embargo, esta crítica fue contrarestada por Hansen (1985), quien desarrolló un modelo RBC libre de la dependencia de una fuerte elasticidad de la oferta de trabajo. Este último modelo se estudiará en detalle en el siguiente capítulo.

En el cuadro [12] se muestra como cambia la desviación estándar de cada una de las variables ante cuatro valores de la elasticidad de Frisch asumiendo un choque de 0.01; además, el estadístico obtenido del modelo se compara con lo observado en los datos. A continuación se describe el comportamiento de la desviación estándar.

[A] Desviación estándar: en primer lugar, se observa que a medida que la demanda de trabajo es más elástica, la desviación estándar de todas las variables se incrementa excepto del salario real, la cual disminuye. En segundo lugar, la desviación estándar del trabajo y del salario real producido por el modelo se acerca más a los datos a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo se incrementa. Por ejemplo, la desviación estándar del trabajo pasa de 0.57 % a 1.44 % cuando la elasticidad se incrementa de 0.2 a 5. Sin embargo, en el caso de la inversión, el modelo sobreestima su desviación estándar para todos los valores de dicha elasticidad. De igual forma para la tasa de interés, donde el valor de elasticidad más bajo del cuadro ($\gamma_n = 0.2$) produce una desviación estándar de 1.72 %, la cual se encuentra muy por encima del valor observado (0.30 %).

En el cuadro [13] se describe dos estadísticos adicionales: la correlación del producto con las variables del modelo y la autocorrelación de primer orden. Ambos estadísticos son importantes en el comportamiento de los ciclos económicos. Asimismo, los cálculos derivados del modelo son comparados con la evidencia empírica. El objetivo de ello es evaluar si la mayor elasticidad de la oferta de trabajo fortalece la capacidad del modelo en replicar los datos. A continuación se describe los datos del cuadro [13].

[B] **Correlación con el PBI:** en primer lugar, la correlación del producto con cada una de las variables del modelo es superior a lo observado en los datos. En segundo lugar, dicha correlación se acerca más a la evidencia empírica a medida que la oferta de trabajo es más elástica ($\uparrow 1/\gamma_n$). Por ejemplo, los datos sugieren que la correlación del producto con el consumo es igual a 0.88; mientras que el modelo infiere que dicha correlación pasa de 0.9097 (con $1/\gamma_n = 0.2$) a 0.8834 (con $1/\gamma_n = 5$).

En tercer lugar, la correlación del producto con la inversión, obtenida del modelo, no es afectada por la elasticidad de la oferta de trabajo. Como se puede observar en el cuadro [13], la correlación del producto con la inversión es 0.9856 para cualquier valor de $1/\gamma_n$, la cual se encuentra por encima del valor observado en los datos (0.8). En cuarto lugar, la elasticidad de la oferta de trabajo tiene poca influencia sobre la correlación entre el producto y el trabajo. Esto se observa en el hecho de que a medida que la elasticidad se incrementa, dicha correlación solo cambia en el cuarto decimal (de 0.9730 a 0.9736).

En quinto lugar, el modelo sobreestima largamente la correlación del producto con la tasa de interés y con el salario real. Con respecto a la tasa de interés, se observa que el modelo infiere que dicha correlación siempre es positiva y cercana a 1; es decir, altamente procíclica. Sin embargo, los datos sugieren que la tasa de interés es contracíclica. Con respecto a la correlación del producto con el salario real, el modelo captura el comportamiento cualitativo pero no el cuantitativo. Los datos sugieren que dicha correlación es baja (0.12); sin embargo, el modelo (para los cuatro valores de $1/\gamma_n$) brinda correlaciones superiores a 0.9. Cabe mencionar que la elasticidad de la oferta de trabajo ayuda a disminuir dicha correlación, pero no lo suficiente. Por ejemplo, para una alta elasticidad ($1/\gamma_n = 5$), la correlacion es 0.9351, lo cual es claramente superior a lo observado (0.12).

[C] **Autocorrelación de primer orden:** en primer lugar, una menor elasticidad de la oferta de trabajo ayuda al modelo en obtener una autocorrelación del consumo más cercana a lo observado. Por ejemplo, para una elasticidad de Frisch de 0.2, la autocorrelación del consumo derivada del modelo es 0.8093, muy cercano a lo observado (0.8). En segundo lugar, la autocorrelación de la inversión inferida por el modelo es menor que lo observado (0.84). Además, el cambio de elasticidad de la oferta de trabajo tiene impacto marginal en este estadístico. Por ejemplo, dicho estadístico pasa de 0.7063 a 0.7009 cuando la elasticidad se incrementa de 0.2 a 5. Es más, una mayor elasticidad de la oferta de trabajo produce que dicha autocorrelación disminuya y se aleje más de los datos.

En tercer lugar, la autocorrelación del salario real es la que más reacciona ante cambios de la elasticidad de la oferta de trabajo. Por ejemplo, cuando la elasticidad se reduce de 5 a 0.2, dicha autocorrelación pasa de 0.7874 a 0.7388. Sin embargo, este último valor aún permanece por encima de lo observado (0.66).

Cuadro 13: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

Variable (x_t)	Corr(PBI_t, x_t)					Autocorrelación				
	Datos	Modelo				Datos	Modelo			
$1/\gamma_n$=		0.2	1	2	5		0.2	1	2	5
Consumo	0.88	0.9079	0.897	0.8909	0.8834	0.8	0.8093	0.8142	0.8167	0.8197
Inversión	0.8	0.9856	0.9856	0.9856	0.9856	0.87	0.7063	0.704	0.7027	0.7009
Producto	1	1	1	1	1	0.84	0.7211	0.7189	0.7176	0.7158
Capital		0.3905	0.3911	0.3913	0.3916		0.9585	0.9579	0.9575	0.9571
Trabajo	0.88	0.973	0.9733	0.9734	0.9736	0.88	0.7045	0.7023	0.7009	0.6991
Tasa de interés	-0.35	0.9494	0.9485	0.948	0.9476	0.6	0.7054	0.7033	0.702	0.7002
Salario real	0.12	0.9933	0.9776	0.9627	0.9351	0.66	0.7388	0.7553	0.7678	0.7874

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de King y Rebelo (1999) y todas las variables están en logarítmo natural, excepto la tasa de interés. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una sola simulación. Estos valores se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log8.mod".

4. Códigos

En el cuadro [14] se menciona los códigos de Matlab y de Dynare que se han utilizado en este capítulo.

Cuadro 14: Códigos en Matlab y Dynare

Códigos	Descripción
Matlab	
Campbell_Lvariable.m	Este m-file contiene: [1] Calibración, [2] Cálculo del estado estacionario, y [3] Cálculo de los coeficientes de la solución (método coeficientes indeterminados).
trabajo_ss.m	El objetivo es calcular h_{ss} que está expresado en una ecuación no lineal.
Analisis_sensibilidad_irf.m	Este m-file grafica: [1A] ESI del consumo, [1B] persistencia del choque, [1C] Elasticidad de Frisch, [2A] (tamaño) choque de productividad, [3A] Tasa de depreciación, [4A] Modelo de Campbell (1994) vs Long y Plosser (1983), y [4B] solo el modelo de Campbell (1994) con trabajo variable.
Sensibilidad_parametros.m	De este m-file se obtiene la simulación de los coeficientes de la solución ante δ (tasa de depreciación), α (participación del capital en la renta nacional), γ_n (inversa de elasticidad de Frisch), y ϕ (persistencia del choque).
Dynare	
Campbell_Lvariable_nolineal_log1.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable. Además, se realiza análisis de sensibilidad para: [A] ESI del consumo ($1/\gamma$), [B] Persistencia (ϕ) del choque de productividad, y [C] Elasticidad de Frisch ($1/\gamma_n$).
Campbell_Lvariable_nolineal_log2.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable y con diferentes valores del choque de productividad (σ).
Campbell_Lvariable_nolineal_log3.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable y con diferentes valores de la tasa de depreciación (δ).
Campbell_Lvariable_nolineal_log4.mod	El modelo de Long y Plosser(1983) con la calibración de Campbell(1994).
Campbell_Lvariable_nolineal_log5.mod	Es el mismo modelo de Campbell(1994) con trabajo variable del "mod1", el cual es utilizado para constuir la tabla de la función de política y estado de este capítulo.
Campbell_Lvariable_nolineal_log7.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable. Se analiza los momentos del componente cíclico de las variables (filtro HP) antes distintos valores del choque (σ).
Campbell_Lvariable_nolineal_log8.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable. Se analiza los momentos del componente cíclico de las variables (filtro HP) antes distintos valores de la elasticidad de Frisch ($1/\gamma_n$).

5. Anexos

Figura 15: Elasticidad de sustitución del consumo ($1/\gamma$)

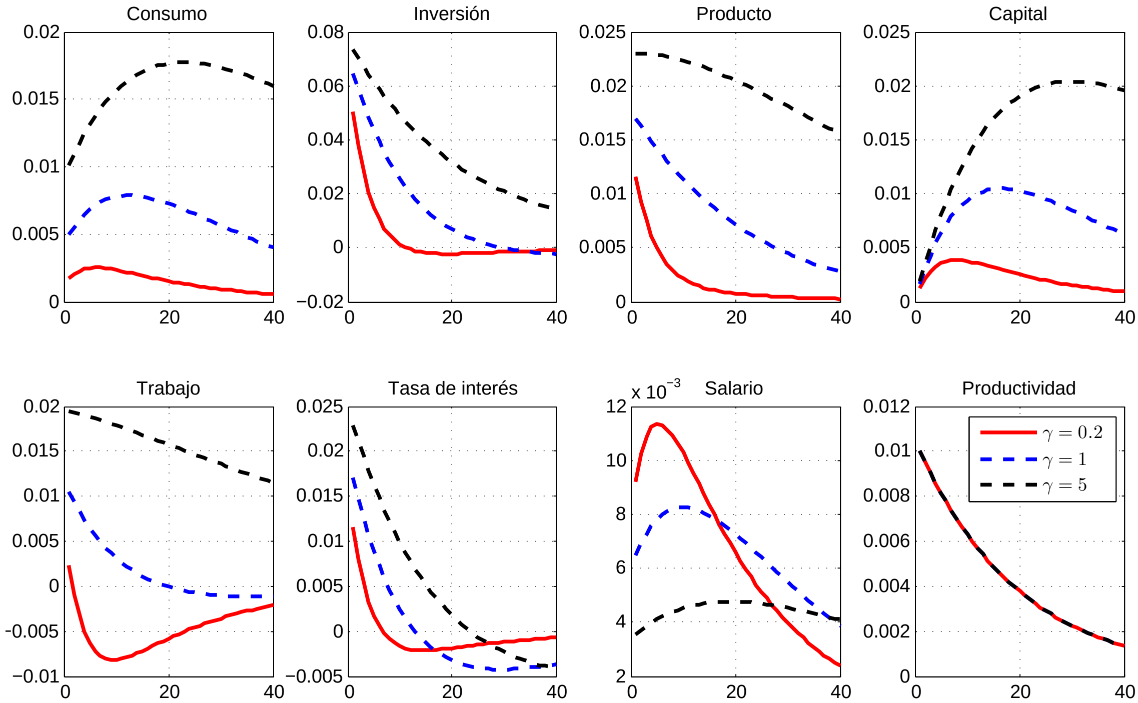


Figura 16: Tamaño (σ_ϵ) del choque de productividad

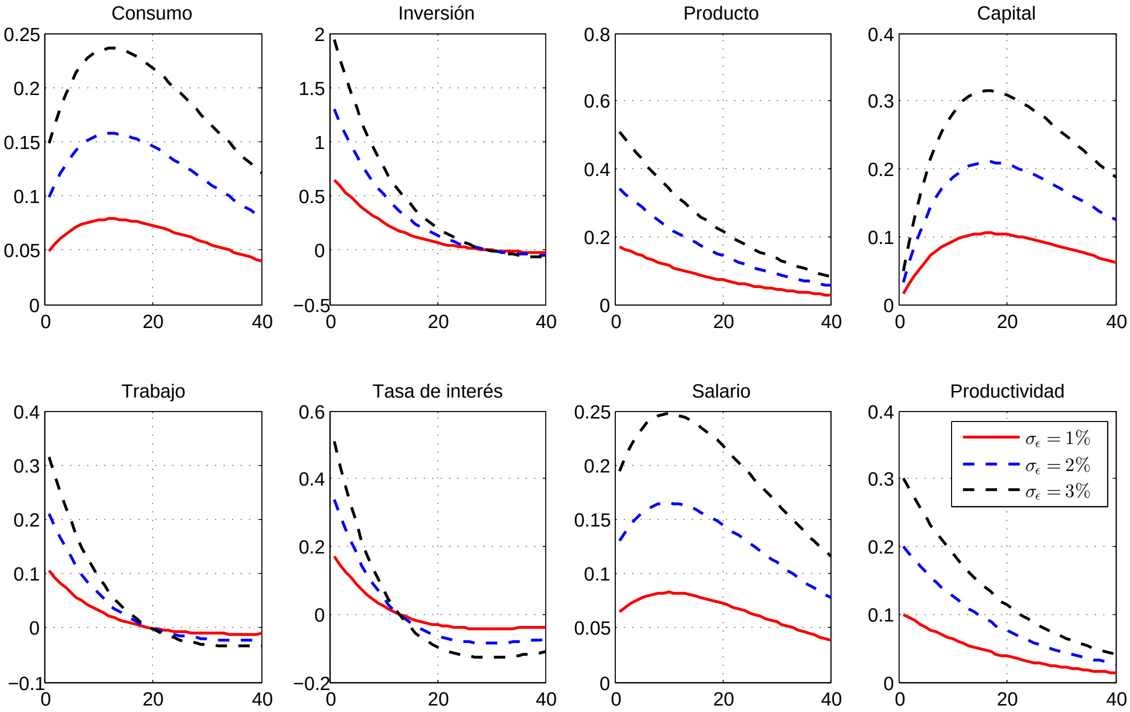


Figura 17: Persistencia (ϕ) del choque de productividad

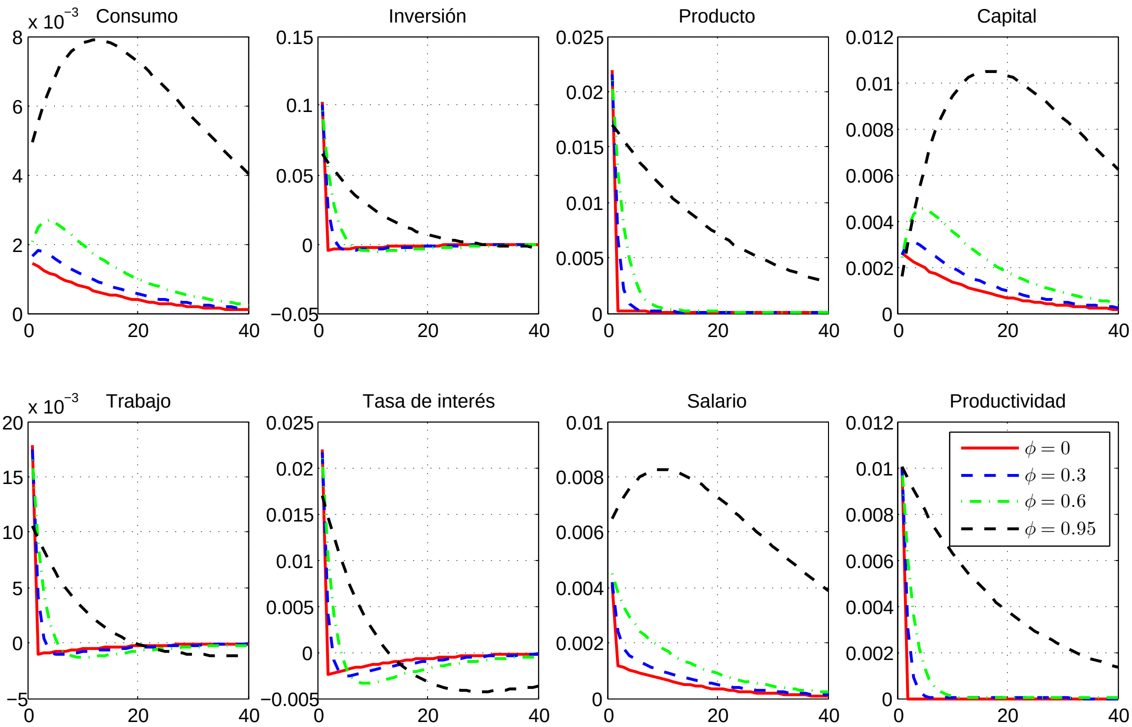


Figura 18: Elasticidad de la oferta de trabajo ($1/\gamma_n$)

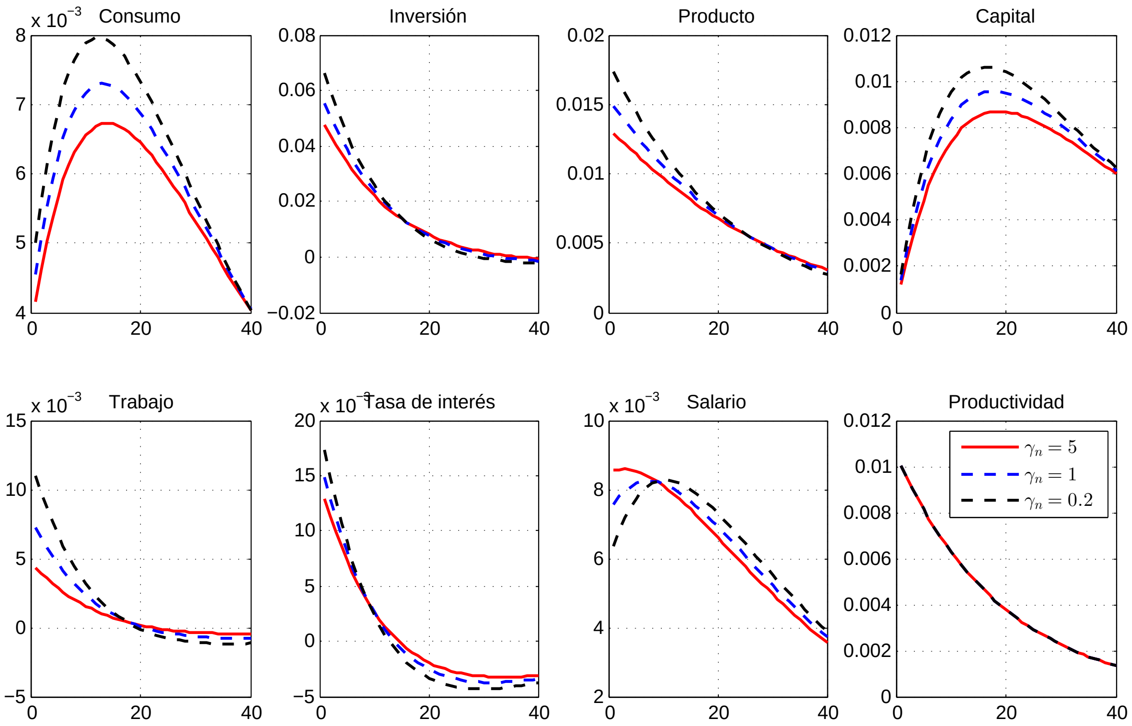


Figura 19: Tasa de depreciación (δ)

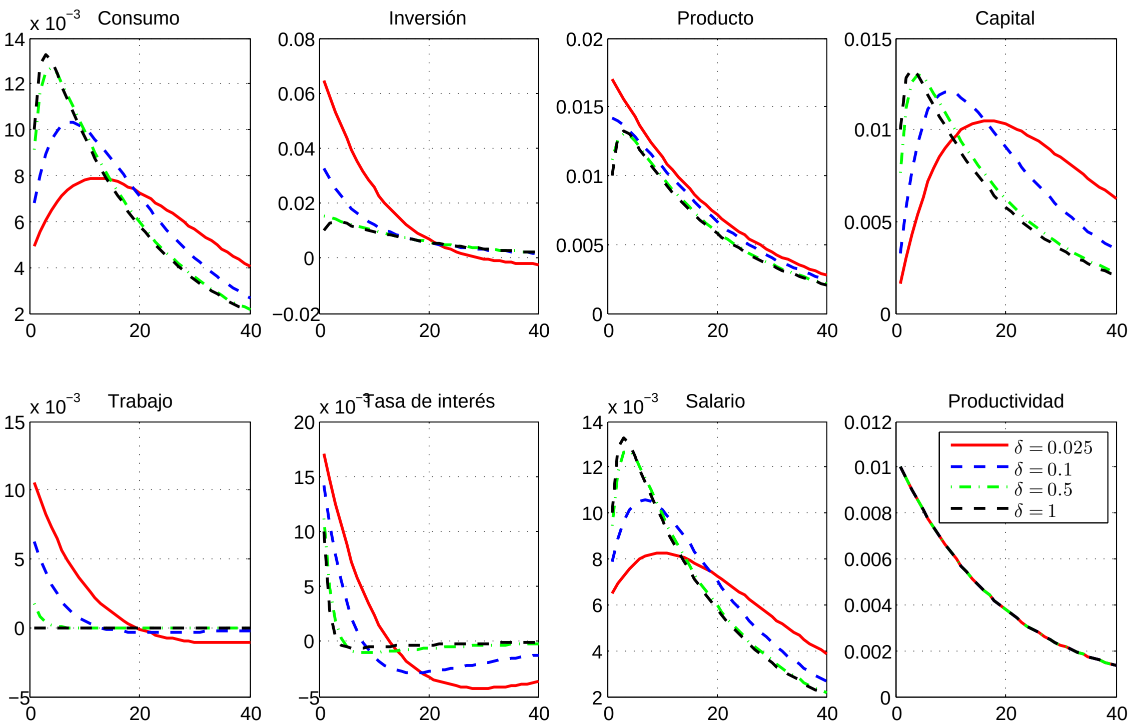


Figura 20: Compración entre el Modelo de Long y Plosser (1983) y el de Campbell (1994) con trabajo variable