

# Capítulo 4

## Modelo RBC con trabajo constante\*

Hamilton Galindo  
Arizona State University (ASU)  
hamilton.galindo@asu.edu

Alexis Montecinos  
Massachusetts Institute of Technology (MIT)  
alexis.montecinos@sloan.mit.edu

Borrador: 8 de julio de 2017

### Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2. Construcción del modelo</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1. Familias . . . . .  | 4         |
| 2.2. Empresas . . . . .  | 7         |
| 2.3. Equilibrio de mercado y definición del choque . . . . .             | 8         |
| 2.4. Ecuaciones principales . . . . .                                    | 8         |
| <b>3. Calibración</b>  | <b>8</b>  |
| <b>4. Estado estacionario</b>  | <b>10</b> |
| <b>5. Log-linealización</b>  | <b>12</b> |
| 5.1. Efecto sustitución y efecto ingreso de la tasa de interés . . . . . | 16        |
| <b>6. Solución del sistema lineal</b>                                    | <b>24</b> |
| 6.1. Método de coeficientes indeterminados . . . . .                     | 24        |
| 6.2. Análisis de elasticidades . . . . .                                 | 26        |
| <b>7. Representación de series de tiempo</b>                             | <b>31</b> |
| 7.1. Serie de tiempo del capital . . . . .                               | 31        |
| 7.2. Serie de tiempo del producto . . . . .                              | 32        |
| 7.3. Serie de tiempo del consumo . . . . .                               | 32        |
| 7.4. Serie de tiempo de la tasa de interés real bruta . . . . .          | 33        |
| 7.5. Serie de tiempo de la inversión . . . . .                           | 33        |

---

\*Disclaimer: cualquier error u omisión es responsabilidad de los autores.

© Todos los derechos reservados.

|   |           |
|---|-----------|
| <b>8. Funciones impulso-respuesta</b>                         | <b>33</b> |
| <b>9. Simulación de las variables endógenas</b>               | <b>41</b> |
| <b>10. Componente cíclico de las variables simuladas</b>      | <b>43</b> |
| <b>11. Cálculo de los momentos teóricos</b>                   | <b>43</b> |
| <b>12. Comparación modelo teórico con los datos empíricos</b> | <b>47</b> |
| <b>13. Códigos</b>  | <b>48</b> |

## 1. Introducción

El objetivo de este capítulo es comprender detalladamente el proceso de construcción y solución de un modelo de ciclos económicos reales. Además, entender cómo se construye la simulación de las variables y cómo se obtiene la función impulso-respuesta. Para ello, en este capítulo, se analiza en detalle uno de los modelos propuestos por Campbell (1994).

El modelo base propuesto por Campbell (1994) es un modelo estacionario (sin tendencia), pero con crecimiento diferente de cero en el estado estacionario. Este modelo es una extensión del modelo de crecimiento estocástico, el cual permite rastrear los efectos dinámicos de cualquier evento aleatorio (choque).

No obstante, la solución del modelo estocástico es difícil principalmente por las no-linealidades que emergen del mismo modelo, las cuales se derivan de la interacción entre elementos multiplicativos (función de producción Cobb-Douglas) y elementos aditivos (ley de movimiento del capital). Un caso especial es el modelo propuesto por Long y Plosser (1983), descrito en el capítulo 3. En ese modelo las no-linealidades desaparecen debido al supuesto no realista que la depreciación es total; es decir, la tasa de depreciación es igual a uno ( $\delta = 1$ ), y que además, la función de utilidad es logarítmica ( $u(c_t, h_t) = \ln c_t + \theta \ln(1 - h_t)$ ). En este caso el modelo llega a ser lineal y puede ser resuelto analíticamente; en los demás casos una “solución aproximada” es requerida.

En línea con lo anterior, Campbell (1994) menciona que un *paper* típico en la literatura RBC plasma el modelo y luego se mueve directamente a la discusión de las propiedades de solución, sin especificar como se llegó a dicha solución. Lo anterior no permite que el lector entienda el proceso para obtener dichas propiedades de solución, ni la solución en sí misma.

Ante ello, el autor propone un enfoque analítico simple del modelo de crecimiento estocástico, cuya versión log-lineal puede ser resuelto analíticamente para mostrar el mecanismo de solución lo más transparente posible. Con el fin de ilustrar el método de solución, Campbell (1994) lo aplica a cuatro modelos: [1] modelo con oferta de trabajo fija, [2] modelo con oferta de trabajo variable y con función de utilidad aditivamente separable, [3] modelo con oferta de trabajo variable y con función de utilidad no aditivamente separable, y [4] el segundo modelo extendido con un choque de gasto público.

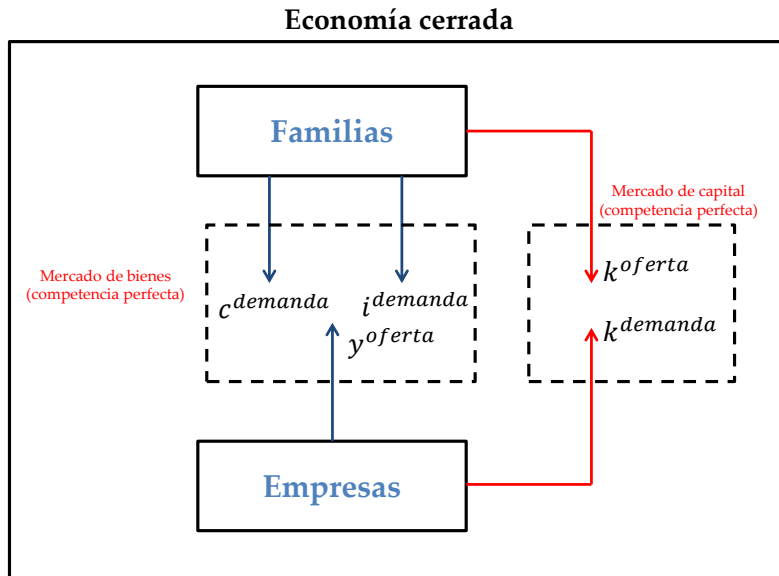
Este capítulo se centra en el primer modelo (oferta de trabajo constante), dejando para el siguiente capítulo el modelo con oferta de trabajo variable.

## 2. Construcción del modelo

Este modelo está compuesto por familias y empresas en un entorno de economía cerrada, en la cual existe un único bien. Por un lado las familias tienen trabajo fijo; es decir, todas las familias están empleadas. Por otro lado las familias son dueñas del capital y por tanto demandan bienes para invertir lo cual a su vez crea una oferta de capital. Asimismo, las familias demandan bienes de consumo.

De otro lado, las empresas tienen una tecnología para producir el único bien en la economía en función del capital. Por ello las empresas demandan capital. En la figura [1] se esquematiza el modelo.

**Figura 1:** Esquema del modelo de oferta de trabajo constante



### 2.1. Familias

En este modelo se asume que la economía está poblada por un conjunto de familias idénticas que tienen vida infinita. La familia representativa busca maximizar su función de utilidad descontada:

$$\text{Max}_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{1}$$

Donde  $c_t$  es el consumo del periodo  $t$  y  $\beta$  es el factor de descuento. Además, la función de utilidad instantánea está descrita por la siguiente forma funcional:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2}$$

**Propiedades de la función de utilidad**

La función de utilidad previa tiene un coeficiente de aversión al riesgo igual a  $\gamma$  y una elasticidad de sustitución intertemporal (del consumo)  $\sigma = 1/\gamma$

**Cálculo de  $ESI_{t+1,t}^c$  ( $\sigma$ ):**

$$\begin{aligned} u_{c_t} &= c_t^{-\gamma} \\ TMgSI_{t+1,t}^c &= -E_t \left[ \frac{u_{c_t}}{\beta u_{c_{t+1}}} \right] = -E_t \left[ \frac{c_t^\gamma}{\beta c_{t+1}^\gamma} \right] \\ ESI_{t+1,t}^c &= \frac{\partial \ln \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)}{\partial \ln (TMgSI_{t+1,t}^c)} = \frac{TMgSI_{t+1,t}^c}{\frac{c_{t+1}}{c_t}} \frac{1}{\frac{\partial TMgSI_{t+1,t}^c}{\partial \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)}} = \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

La elasticidad de sustitución intertemporal del consumo ( $\sigma$ ) se entiende como la disposición de la familia de sustituir consumo hoy ( $\downarrow c_t$ ) por consumo de mañana ( $\uparrow c_{t+1}$ ). Cuando se dice que dicha elasticidad es fuerte ( $\sigma$  es grande), se entiende que el consumidor está dispuesto a reducir su consumo hoy en mayor cantidad.

De otro lado, se asume que la familia es dueña del capital físico ( $k_t$ ), cuya dinámica de acumulación está representada por la ley de movimiento del capital:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (3)$$

Dicho capital ( $k_t$ ) es alquilado a las empresas a una tasa de interés real  $r_t$ . Este flujo ( $r_t k_t$ ) positivo representa los ingresos de la familia, los cuales son distribuidos entre el consumo ( $c_t$ ) y la inversión ( $i_t$ ). Esta equivalencia de flujos, para cada periodo de tiempo, está representada en la restricción presupuestaria.

$$c_t + i_t = r_t k_t \quad (4)$$

**Problema de optimización**

El problema de optimización de la familia representativa es el siguiente:

$$\text{Max}_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = r_t k_t$$

Donde la inversión ( $i_t$ ) se ha reemplazado por su expresión derivada de la ley de movimiento del capital (ecuación (3)). Además, cabe mencionar que las variables de control, en este problema de optimización, son:  $c_t$  y  $k_{t+1}$ .

El problema de optimización de las familias puede ser escrito como una función de Lagrange:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(c_t) + \lambda_t (r_t k_t - (c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t))]$$

Donde, de manera similar al capítulo 3 (modelo Lomg y Plosser (1983)), la versión extendida de la función de Lagrange se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & E_0 \left\{ \beta^0 [u(c_0) + \lambda_0 (r_0 k_0 - (c_0 + k_1 - (1 - \delta)k_0))] + \right. \\ & \beta^1 [u(c_1) + \lambda_1 (r_1 k_1 - (c_1 + k_2 - (1 - \delta)k_1))] + \\ & \beta^2 [u(c_2) + \lambda_2 (r_2 k_2 - (c_2 + k_3 - (1 - \delta)k_2))] + \\ & \beta^3 [u(c_3) + \lambda_3 (r_3 k_3 - (c_3 + k_4 - (1 - \delta)k_3))] + \\ & \beta^4 [u(c_4) + \lambda_4 (r_4 k_4 - (c_4 + k_5 - (1 - \delta)k_4))] + \\ & \dots + \\ & \beta^t [u(c_t) + \lambda_t (r_t k_t - (c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t))] + \\ & \beta^{t+1} [u(c_{t+1}) + \lambda_{t+1} (r_{t+1} k_{t+1} - (c_{t+1} + k_{t+2} - (1 - \delta)k_{t+1}))] + \\ & \dots + \\ & \left. \dots \right\} \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden, en el periodo “t”, son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 & \implies E_0 \left\{ \beta^t [u_{c_t} + \lambda_t (-1)] \right\} = 0 \\ u_{c_t} & = \lambda_t \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 & \implies E_0 \left\{ \beta^t [\lambda_t (-1)] + \beta^{t+1} [\lambda_{t+1} (r_{t+1} + (1 - \delta))] \right\} = 0 \\ \lambda_t & = \beta E_t \lambda_{t+1} (r_{t+1} + (1 - \delta)) \end{aligned} \quad (6)$$

Reemplazando la ecuación (5) en la ecuación (6) se obtiene la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} u_{c_t} & = \beta E_t u_{c_{t+1}} (r_{t+1} + (1 - \delta)) \\ c_t^{-\gamma} & = \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} (r_{t+1} + (1 - \delta)) \end{aligned} \quad (7)$$

En línea con Campbell (1994), se define la variable  $R_t$  como la tasa bruta de interés de la inversión en capital de un periodo, el cual es igual a la tasa de interés real neta ( $r_t$ ) más el capital no depreciado ( $1 - \delta$ ). En el periodo “t+1” esta relación se expresa de la siguiente manera.

$$R_{t+1} = r_{t+1} + (1 - \delta) \quad (8)$$

Considerando la expresión anterior, la ecuación de Euler tendría la forma siguiente:

$$c_t^{-\gamma} = \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} \quad (9)$$

La ecuación de Euler expresa una comparación beneficio/costo marginal de consumir una unidad del bien. Por un lado se tiene el costo marginal de dejar de consumir una

unidad adicional del bien, el cual es expresado por la utilidad marginal  $u_{c_t}$ . Por otro lado se tiene el beneficio marginal de no consumir dicha unidad del bien en “t”, la cual en el periodo siguiente “t + 1” se convierte en  $1(1 + r_{t+1} - \delta)$  unidades de bien. Esto se debe a que existe una tasa de interés y una tasa de depreciación. La utilidad marginal que brinda esta unidad adicional en “t+1” es  $u_{c_{t+1}}R_{t+1}$ . Sin embargo, para compararlo con el costo marginal en “t” es necesario traerlo a valor presente por medio del factor de descuento “ $\beta$ ”. Por tanto, el beneficio marginal, en “t”, es igual a  $\beta u_{c_{t+1}}(R_{t+1})$ . Esto se observa en la siguiente ecuación.

$$\underbrace{u_{c_t}}_{\text{costo marginal}} = \underbrace{\beta E_t u_{c_{t+1}}(r_{t+1} + (1 - \delta))}_{\text{beneficio marginal}}$$

Por tanto, la ecuación de Euler indica que la familia está dispuesta a sacrificar consumo hoy hasta que el costo marginal de dejar de consumir una unidad del bien hoy sea igual al beneficio marginal de dicha unidad del bien traído a valor presente.

## 2.2. Empresas

Se asume que las empresas se desarrollan en un contexto de competencia perfecta tanto en el mercado de bienes como en el mercado de factores de producción. En este escenario, la empresa representativa maximiza su función de beneficios sujeta a su tecnología (función de producción). Dicho problema de optimización está descrito de la siguiente manera:

$$\text{Max}_{\{k_t\}_{t=0}^{\infty}} \Pi_t = y_t - r_t k_t$$

Sujeto a la función de producción:

$$y_t = a_t^\alpha k_t^{1-\alpha} \quad (10)$$

La función de producción solo depende de la productividad  $a_t$  y del capital  $k_t$  debido a que se asume que el trabajo  $h_t$  es constante (fijo). Además, debido a que la empresa no toma decisiones intertemporales, su problema de optimización se realiza para cada uno de los periodos. Por tanto, el problema de optimización se puede realizar en  $t$  y extender el resultado para los siguientes periodos.

Introduciendo la función de producción en la función objetivo y derivando esta última con respecto a la única variable de control ( $k_t$ ), se obtiene la siguiente expresión.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k_t} = 0 \implies \frac{\partial (a_t^\alpha k_t^{1-\alpha} - r_t k_t)}{\partial k_t} = 0 \implies (1 - \alpha) \left[ \frac{a_t}{k_t} \right]^\alpha - r_t = 0$$

De esta condición de primer orden se obtiene la demanda de capital:

$$r_t = (1 - \alpha) \left[ \frac{a_t}{k_t} \right]^\alpha \quad (11)$$

### 2.3. Equilibrio de mercado y definición del choque

Para completar el modelo antes descrito es necesario especificar dos ecuaciones adicionales. La primera describe el equilibrio en el mercado de bienes; es decir, todo lo que se produce en la economía debe encontrar su contraparte en los diferentes componentes del gasto agregado. La segunda especifica el comportamiento de la productividad. Con respecto a esta última, usualmente se supone que es estacionaria en media y que tiene una varianza constante. La forma estándar de representarla es asumiendo que la productividad sigue un proceso autorregresivo de orden uno.

En este modelo en particular, se asume que no existe gasto de gobierno ( $g_t = 0$ ) y que la economía es pequeña y cerrada. Por tanto, toda la producción tendrá dos posibles destinos: el consumo ( $c_t$ ) y la inversión ( $i_t$ ). En ese sentido, la condición de equilibrio está descrita por la siguiente ecuación:

$$y_t = c_t + i_t \quad (12)$$

De otro lado, la productividad sigue un comportamiento estacionario AR(1), en la cual el choque está representado por el ruido blanco  $\epsilon_t$ , que tiene una función de distribución normal con media cero y varianza constante  $[N(0, \sigma_\epsilon^2)]$ . En estado estacionario, se asume que dicho ruido blanco toma el valor de su media. Asimismo, cuando se dice que la economía ha sufrido un “choque” en  $t = 0$  significa que en dicho periodo el ruido blanco ( $\epsilon_t$ ) ha dejado de ser cero y ha tomado, solo en ese periodo, algún valor proporcional a su desviación estándar ( $n\sigma_\epsilon$ ). Usualmente, se considera que  $n$  es igual a uno. La ecuación (13) describe el comportamiento de la productividad.

$$\ln a_t = \phi \ln a_{t-1} + \epsilon_t \quad (13)$$

Cabe subrayar que el logaritmo de la productividad se comporta como un AR(1) y no la productividad en sí misma. Esto es importante porque permite que, en el estado estacionario, la productividad sea igual a uno, lo cual evita cualquier división entre cero.

### 2.4. Ecuaciones principales

Las ecuaciones principales del modelo se resumen en cuadro [1]:

Este conjunto de ecuaciones representan un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales y estocásticas. Para resolver dicho sistema, como es usual en la literatura, se transforma en un sistema de ecuaciones lineales. Esto es debido a que las técnicas matemáticas de solución de sistemas lineales son ampliamente conocidas en la literatura. La solución del sistema lineal será una aproximación de la solución del sistema no-lineal. Cabe mencionar que un paso previo a la linealización de sistema de ecuaciones es la asignación de valores a los parámetros (calibración) y el cálculo del estado estacionario.

## 3. Calibración

Calibración es una metodología empírica, la cual consiste en asignar un valor a los parámetros del modelo de equilibrio general basado en una diversidad de fuentes. Según Heer y Maußner (2009), las fuentes más comunes son las siguientes:



**Cuadro 1:** Sistema de ecuaciones no lineal del modelo

| Ecuaciones  | Descripción  |
|---|--|
| $\bar{c}_t^{-\gamma} = \beta E_t \bar{c}_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1}$ | Ecuación de Euler  |
| $y_t = a_t^\alpha k_t^{1-\alpha}$                                 | Función de producción  |
| $r_t = (1 - \alpha) \left[ \frac{a_t}{k_t} \right]^\alpha$        | Demanda del capital  |
| $R_t = r_t + (1 - \delta)$  | $R_t$ es la tasa de interés real (bruta)<br>$r_t$ es la tasa de interés real (neta)<br>que considera la depreciación |
| $y_t = c_t + i_t$   | Equilibrio mercado de bienes   |
| $k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$                                 | Ley de movimiento del capital  |
| $\ln a_t = \phi \ln a_{t-1} + \epsilon_t$                         | Choque de productividad  |

**Nota:** Estas 7 ecuaciones se pueden escribir directamente en un “mod” en Dynare para obtener la solución del modelo y los IRFs.

1. El uso del promedio del nivel de variables económicas de series de tiempo o el promedio de los ratios de dichas variables.
2. La estimación econométrica de una ecuación.
3. Referencia a estudios econométricos basados en datos microeconómicos o macroeconómicos.
4. Ajustar los parámetros para que el modelo replique ciertos hechos empíricos como segundo momentos de los datos o impulso-respuesta de un VAR estructural.

La forma de evaluar el poder del modelo para capturar la realidad es por medio de la comparación de los valores de los segundos momentos y de las funciones impulso-respuesta con los valores obtenidos empíricamente. En el cuadro [2] se indica los valores de los parámetros del modelo, los cuales están basados en Campbell (1994).

**Cuadro 2:** Calibración (valores base)

| Parámetro  | Nombre  | Sustento anual                        |
|--|---|---------------------------------------|
| $\alpha = 0.667$   | $(1 - \alpha)$ es la participación del capital en el producto |                                       |
| $\delta = 0.025$   | Tasa de depreciación  | 10 % anual                            |
| $\ln(R_{ss}) = 0.015$ , lleva a $R_{ss} = 1.015$ y por tanto: $\beta = 0.9852$ | Tasa de interés real bruta de estado estacionario             | 6.184 % anual:<br>$(1 + 0.015)^4 - 1$ |
| $\sigma = 0.2$   | Tlasticidad de sustitución intertemporal del consumo          |                                       |
| $\phi = 0.95$  | Persistencia del choque                                       |                                       |
| $\sigma_\epsilon = 1$  | Desviación estándar del choque                                |                                       |

## 4. Estado estacionario

Para el cálculo del estado estacionario se considera que la variable  $x_t$  se mantiene constante. Entonces, en el estado estacionario se tiene que  $x_t = x_{t+1} = x_{ss}$ . Esta última condición se aplica a todas las variables endógenas. Además, en el estado estacionario el choque  $\epsilon_{ss}$  toma su valor promedio, que es igual a cero.

Para la ecuación de Euler se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} \\ c_{ss}^{-\gamma} &= \beta c_{ss}^{-\gamma} R_{ss} \\ 1 &= \beta R_{ss} \\ R_{ss} &= \frac{1}{\beta} \end{aligned} \tag{14}$$

Para la función de producción:

$$\begin{aligned} y_t &= a_t^\alpha k_t^{1-\alpha} \\ y_{ss} &= a_{ss}^\alpha k_{ss}^{1-\alpha} \end{aligned} \tag{15}$$

Para la demanda de capital:

$$\begin{aligned} r_t &= (1 - \alpha) \left[ \frac{a_t}{k_t} \right]^\alpha \\ r_{ss} &= (1 - \alpha) \left[ \frac{a_{ss}}{k_{ss}} \right]^\alpha \end{aligned} \tag{16}$$

De la ecuación de la tasa de interés bruta:

$$\begin{aligned} R_t &= r_t + (1 - \delta) \\ R_{ss} &= r_{ss} + (1 - \delta) \end{aligned}$$

por la ecuación (14):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} &= r_{ss} + (1 - \delta) \\ r_{ss} &= \frac{1}{\beta} - (1 - \delta) \end{aligned} \tag{17}$$

Para la ecuación de equilibrio en el mercado de bienes:

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + i_t \\ y_{ss} &= c_{ss} + i_{ss} \end{aligned} \tag{18}$$

De la misma manera para la ley de movimiento del capital:

$$\begin{aligned}k_t &= (1 - \delta)k_t + i_t \\k_{ss} &= (1 - \delta)k_{ss} + i_{ss} \\i_{ss} &= \delta k_{ss}\end{aligned}\tag{19}$$

Finalmente para la ecuación de comportamiento de la productividad:

$$\begin{aligned}\ln a_t &= \phi \ln a_{t-1} + \epsilon_t \\ \ln a_{ss} &= \phi \ln a_{ss} + \underbrace{\epsilon_{ss}}_{=0(\text{valor de su media})} \\ \ln a_{ss} &= \phi \ln a_{ss} \\ \ln(a_{ss}) &= \ln(a_{ss}^\phi) \\ a_{ss} &= a_{ss}^\phi\end{aligned}\tag{20}$$

Al igual que en el modelo de Long y Plosser (1983), dos valores de  $a_{ss}$  podrían resolver esta última ecuación (20):  $a_{ss} = 1$  o  $a_{ss} = 0$ . Sin embargo, solo cuando  $a_{ss} = 1$ , el  $\ln a_{ss}$  existe. Por tanto, la solución correcta es  $a_{ss} = 1$ . La ventaja de considerar la ecuación del choque de productividad en logaritmos es que evita que la productividad en estado estacionario pueda ser cero. Esto es importante porque evita que en las ecuaciones de estado estacionario y en las ecuaciones log-lineales se encuentre algún número o variable dividida por cero.

Hasta aquí se ha encontrado el valor de estado estacionario de la tasa de interés bruta  $R_{ss}$ , de la tasa de interés neta  $r_{ss}$  y de la productividad  $a_{ss}$ ; sin embargo para encontrar el estado estacionario para las demás variables se tiene que hacer algunas operaciones algebraicas adicionales. De la ecuación (16) se tiene:

$$r_{ss} = (1 - \alpha) \left[ \frac{a_{ss}}{k_{ss}} \right]^\alpha$$

Como ya se conoce el valor de  $r_{ss}$  por la ecuación (17) y de  $a_{ss}$ , entonces se puede conocer el valor del capital  $k_{ss}$ .

$$\begin{aligned}r_{ss} &= (1 - \alpha) \left[ \frac{a_{ss}}{k_{ss}} \right]^\alpha \\ k_{ss} &= a_{ss} \left[ \frac{r_{ss}}{(1 - \alpha)} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}\end{aligned}\tag{21}$$

Debido a que ya se conoce  $k_{ss}$ , entonces se puede hallar el valor del producto  $y_{ss}$ , de la inversión  $i_{ss}$  y del consumo  $c_{ss}$ :

$$y_{ss} = a_{ss}^\alpha k_{ss}^{1-\alpha}, \quad \text{de la ecuación (15)}\tag{22}$$

$$i_{ss} = \delta k_{ss}, \quad \text{de la ecuación (19)}\tag{23}$$

$$c_{ss} = y_{ss} - i_{ss}, \quad \text{de la ecuación (18)}\tag{24}$$

En el cuadro [3] se resume la expresión del estado estacionario de cada variable del modelo.

**Cuadro 3:** Estado estacionario

| Estado estacionario (forma recursiva)  | Estado estacionario (forma paramétrica)   |
|--|---|
| $R_{ss} = \frac{1}{\beta}$   | $= \frac{1}{\beta}$   |
| $r_{ss} = R_{ss} - (1 - \delta)$   | $= \frac{1}{\beta} - (1 - \delta)$  |
| $a_{ss} = 1$   | $= 1$   |
| $k_{ss} = a_{ss} \left[ \frac{r_{ss}}{(1-\alpha)} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$ | $= \left[ \frac{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)}{1-\alpha} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$  |
| $y_{ss} = a_{ss}^\alpha k_{ss}^{1-\alpha}$                                     | $= \left[ \frac{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)}{1-\alpha} \right]^{-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}$   |
| $i_{ss} = \delta k_{ss}$   | $= \delta \left[ \frac{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)}{1-\alpha} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$   |
| $c_{ss} = y_{ss} - i_{ss}$   | $= \left[ \frac{\frac{1}{\beta} + \alpha\delta - 1}{1-\alpha} \right] \left[ \frac{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)}{1-\alpha} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$ |

**Nota:** El cálculo de los estados estacionarios se encuentran en Campbell\_Lfijo.m (sección 1).

## 5. Log-linealización

El sistema de ecuaciones que describe el modelo de Campbell (1994) es no lineal. Esta característica del modelo dificulta la forma de encontrar la solución de dicho sistema. Una forma estándar de abordar esta dificultad es log-linealizar cada ecuación; es decir, convertir una ecuación no lineal en una ecuación lineal en términos de log desviación de la variable con respecto a su estado estacionario. Además, para pequeñas desviaciones del estado estacionario, la log desviación de una variable tiene una interpretación económica importante: ella es aproximadamente igual a la desviación, en porcentaje, del estado estacionario (Uhlig, 1995).

La ventaja de aplicar log-linealización es que convierte el sistema no lineal en lineal, al cual se le puede aplicar los métodos matemáticos estándar para resolver dichos sistemas (Blanchard y Kahn, 1981).

En primer lugar, se define la variable en log-desviaciones:

$$\hat{x}_t = \ln x_t - \ln x_{ss} \quad (25)$$

En segundo lugar, despejando la variable  $x_t$  de la ecuación [25] se tiene:

$$x_t = x_{ss} e^{\hat{x}_t} \quad (26)$$

En tercer lugar, se hace una aproximación de Taylor de primer orden de  $e^{\hat{x}_t}$  con respecto al estado estacionario, en el cual  $\hat{x}_t = 0$ ; es decir,  $x_t = x_{ss}$ :

$$\begin{aligned}
e^{\hat{x}_t} \Big|_{\hat{x}_t=0} &\cong e^{\hat{x}_t=0} + e^{\hat{x}_t=0}(\hat{x}_t - 0) \\
e^{\hat{x}_t} \Big|_{\hat{x}_t=0} &\cong 1 + \hat{x}_t \\
e^{\hat{x}_t} &\cong 1 + \hat{x}_t
\end{aligned} \tag{27}$$

Esta última ecuación se reemplaza en la ecuación (26):

$$x_t = x_{ss} e^{\hat{x}_t} \cong x_{ss} (1 + \hat{x}_t) \tag{28}$$

De la ecuación (28) se despeja  $\hat{x}_t$ :

$$\hat{x}_t \cong \frac{x_t - x_{ss}}{x_{ss}} \tag{29}$$

Por tanto, la variable en log-desviaciones es aproximadamente igual a la desviación, en porcentaje, del estado estacionario. De un punto de vista práctico, se puede reemplazar cada variable por su expresión log-lineal y luego se aplica la aproximación de primer orden según la ecuación (27).

Log-linealizando la ecuación de Euler se tiene:

$$\begin{aligned}
c_t^{-\gamma} &= \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} \\
[c_{ss} e^{\hat{c}_t}]^{-\gamma} &= \beta E_t [c_{ss} e^{\hat{c}_{t+1}}]^{-\gamma} [R_{ss} e^{\hat{R}_{t+1}}] \\
e^{-\gamma \hat{c}_t} &= E_t e^{-\gamma \hat{c}_{t+1}} e^{\hat{R}_{t+1}} \\
e^{-\gamma \hat{c}_t} &= E_t e^{-\gamma \hat{c}_{t+1} + \hat{R}_{t+1}} \\
1 - \gamma \hat{c}_t &= E_t [1 - \gamma \hat{c}_{t+1} + \hat{R}_{t+1}] \\
\hat{c}_t &= E_t [\hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma} \hat{R}_{t+1}]
\end{aligned} \tag{30}$$

Haciendo lo mismo para la función de producción: '

$$\begin{aligned}
y_t &= a_t^\alpha k_t^{1-\alpha} \\
y_{ss} e^{\hat{y}_t} &= [a_{ss} e^{\hat{a}_t}]^\alpha [k_{ss} e^{\hat{k}_t}]^{1-\alpha} \\
y_{ss} e^{\hat{y}_t} &= a_{ss}^\alpha e^{\alpha \hat{a}_t} k_{ss}^{1-\alpha} e^{(1-\alpha) \hat{k}_t} \\
e^{\hat{y}_t} &= e^{\alpha \hat{a}_t + (1-\alpha) \hat{k}_t} \\
1 + \hat{y}_t &= 1 + \alpha \hat{a}_t + (1-\alpha) \hat{k}_t \\
\hat{y}_t &= \alpha \hat{a}_t + (1-\alpha) \hat{k}_t
\end{aligned} \tag{31}$$

Con respecto a la demanda de capital:

$$\begin{aligned}
r_t &= (1 - \alpha) \left( \frac{a_t}{k_t} \right)^\alpha \\
r_{ss} e^{\hat{r}_t} &= (1 - \alpha) \left( \frac{a_{ss} e^{\hat{a}_t}}{k_{ss} e^{\hat{k}_t}} \right)^\alpha \\
r_{ss} e^{\hat{r}_t} &= (1 - \alpha) \left( \frac{a_{ss}}{k_{ss}} \right)^\alpha \left( \frac{e^{\hat{a}_t}}{e^{\hat{k}_t}} \right)^\alpha \\
r_{ss} e^{\hat{r}_t} &= (1 - \alpha) \left( \frac{a_{ss}}{k_{ss}} \right)^\alpha (e^{\alpha(\hat{a}_t - \hat{k}_t)}) \\
e^{\hat{r}_t} &= e^{\alpha(\hat{a}_t - \hat{k}_t)} \\
1 + \hat{r}_t &= 1 + \alpha(\hat{a}_t - \hat{k}_t) \\
\hat{r}_t &= \alpha(\hat{a}_t - \hat{k}_t)
\end{aligned} \tag{32}$$

En el caso de la tasa bruta de interés, su forma log-lineal se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
R_t &= r_t + (1 - \delta) \\
R_{ss} e^{\hat{R}_t} &= r_{ss} e^{\hat{r}_t} \\
R_{ss}(1 + \hat{R}_t) &= r_{ss}(1 + \hat{r}_t) \\
\hat{R}_t &= \frac{r_{ss}}{R_{ss}} \hat{r}_t
\end{aligned} \tag{33}$$

En el equilibrio de mercado de bienes:

$$\begin{aligned}
y_t &= c_t + i_t \\
y_{ss} e^{\hat{y}_t} &= c_{ss} e^{\hat{c}_t} + i_{ss} e^{\hat{i}_t} \\
y_{ss}(1 + \hat{y}_t) &= c_{ss}(1 + \hat{c}_t) + i_{ss}(1 + \hat{i}_t) \\
y_{ss} + y_{ss} \hat{y}_t &= c_{ss} + c_{ss} \hat{c}_t + i_{ss} + i_{ss} \hat{i}_t \\
y_{ss} \hat{y}_t &= c_{ss} \hat{c}_t + i_{ss} \hat{i}_t \\
\hat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \hat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \hat{i}_t
\end{aligned} \tag{34}$$

La ley de movimiento de capital en su forma log-lineal quedaría:

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + i_t \\
k_{ss} e^{\hat{k}_{t+1}} &= (1 - \delta)k_{ss} e^{\hat{k}_t} + i_{ss} e^{\hat{i}_t} \\
k_{ss}(1 + \hat{k}_{t+1}) &= (1 - \delta)k_{ss}(1 + \hat{k}_t) + i_{ss}(1 + \hat{i}_t) \\
k_{ss} + k_{ss} \hat{k}_{t+1} &= (1 - \delta)k_{ss} + (1 - \delta)k_{ss} \hat{k}_t + i_{ss} + i_{ss} \hat{i}_t \\
k_{ss} \hat{k}_{t+1} &= (1 - \delta)k_{ss} \hat{k}_t + i_{ss} \hat{i}_t \\
\hat{k}_{t+1} &= (1 - \delta)\hat{k}_t + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} \hat{i}_t
\end{aligned} \tag{35}$$

Finalmente, la ecuación de la productividad:

$$\begin{aligned}
\ln a_t &= \phi \ln a_{t-1} + \epsilon_t \\
\ln a_{ss} e^{\hat{a}_t} &= \phi \ln a_{ss} e^{\hat{a}_{t-1}} + \epsilon_t \\
\ln a_{ss} + \hat{a}_t &= \phi \ln a_{ss} + \phi \hat{a}_{t-1} + \epsilon_t \\
\hat{a}_t &= \phi \hat{a}_{t-1} + \epsilon_t
\end{aligned} \tag{36}$$

El cuadro [4] resume las ecuaciones log-lineal del modelo:

**Cuadro 4:** Ecuaciones log-lineal

| Ecuaciones log-lineal   | Descripción                        |
|---|------------------------------------|
| [1] $\hat{c}_t = E_t[\hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma} \hat{R}_{t+1}]$               | Ecuación de Euler                  |
| [2] $\hat{y}_t = \alpha \hat{a}_t + (1 - \alpha) \hat{k}_t$                         | Función de producción              |
| [3] $\hat{r}_t = \alpha[\hat{a}_t - \hat{k}_t]$                                     | Demanda de capital                 |
| [4] $\hat{R}_t = \frac{r_{ss}}{R_{ss}} \hat{r}_t$                                   | Tasa de interés bruta              |
| [5] $\hat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \hat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \hat{i}_t$ | Equilibrio en el mercado de bienes |
| [6] $\hat{k}_{t+1} = (1 - \delta) \hat{k}_t + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} \hat{i}_t$      | Ley de movimiento del capital      |
| [7] $\hat{a}_t = \phi \hat{a}_{t-1} + \epsilon_t$                                   | Choque de productividad            |

**Nota:** Para obtener directamente la solución del modelo con Dynare se puede utilizar el mod “Campbell\_Lfijo\_Dynare.mod”

El número de ecuaciones del cuadro [4] se puede resumir en cinco, para ello se introduce la ecuación de equilibrio del mercado de bienes (ecuación 5) en la ecuación del movimiento del capital (ecuación 6). La variable que relaciona ambas ecuaciones es la inversión. En primer lugar se despeja la inversión de la ecuación 5:

$$\hat{i}_t = \left[ \hat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \hat{c}_t \right] \frac{y_{ss}}{i_{ss}}$$

En segundo lugar, se introduce esta ecuación en la ley de movimiento de capital:

$$\hat{k}_{t+1} = (1 - \delta) \hat{k}_t + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} \left( \left[ \hat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \hat{c}_t \right] \frac{y_{ss}}{i_{ss}} \right)$$

Además, se introduce la ecuación de la función de producción ( $y_t$ ):

$$\hat{k}_{t+1} = (1 - \delta) \hat{k}_t + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} \left( \left[ (\alpha \hat{a}_t + (1 - \alpha) \hat{k}_t) - \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \hat{c}_t \right] \frac{y_{ss}}{i_{ss}} \right)$$

Ordenando los términos algebraicos se tiene:

$$\hat{k}_{t+1} = \underbrace{\left[ (1 - \delta) + \delta(1 - \alpha) \frac{y_{ss}}{i_{ss}} \right]}_{\lambda_1} \hat{k}_t + \underbrace{\delta \alpha \frac{y_{ss}}{i_{ss}}}_{\lambda_2} \hat{a}_t - \delta \frac{c_{ss}}{i_{ss}} \hat{c}_t \tag{37}$$

De los coeficientes de la ecuación (37) se demuestra que:

$$-\delta \frac{c_{ss}}{i_{ss}} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

Por tanto, la ecuación final es:

$$\widehat{k}_{t+1} = \lambda_1 \widehat{k}_t + \lambda_2 \widehat{a}_t + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \widehat{c}_t \quad (38)$$

De otro lado, la ecuación [3] (demanda de capital) se introduce en la ecuación [4] (tasa de interés bruta):

$$\begin{aligned} \widehat{R}_t &= \alpha \frac{r_{ss}}{R_{ss}} \widehat{r}_t \\ \widehat{R}_t &= \alpha \frac{r_{ss}}{R_{ss}} [\widehat{a}_t - \widehat{k}_t] \\ \widehat{R}_t &= \lambda_3 [\widehat{a}_t - \widehat{k}_t] \end{aligned} \quad (39)$$

Donde en la ecuación previa se ha definido el coeficiente  $\lambda_3$ :

$$\lambda_3 = \alpha \frac{r_{ss}}{R_{ss}}$$

El cuadro [5] resume las cinco principales ecuaciones log-lineal del modelo de trabajo fijo de Campbell (1994).

**Cuadro 5:** Ecuaciones log-lineal (sistema reducido)

| Ecuaciones log-lineal |   |
|-----------------------|---|
| [1]                   | $\widehat{c}_t = E_t [\widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma} \widehat{R}_{t+1}]$                                      |
| [2]                   | $\widehat{y}_t = \alpha \widehat{a}_t + (1 - \alpha) \widehat{k}_t$   |
| [3]                   | $\widehat{R}_t = \lambda_3 [\widehat{a}_t - \widehat{k}_t]$   |
| [4]                   | $\widehat{k}_{t+1} = \lambda_1 \widehat{k}_t + \lambda_2 \widehat{a}_t + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \widehat{c}_t$ |
| [5]                   | $\widehat{a}_t = \phi \widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$   |

### 5.1. Efecto sustitución y efecto ingreso de la tasa de interés

Antes de resolver el sistema log-lineal es importante analizar el impacto de la tasa de interés real sobre el consumo. Para abordar este análisis es muy útil utilizar las ecuaciones log-lineales.

La teoría del consumidor sugiere que cuando el precio ( $p_t$ ) de un bien ( $q_t$ ) cambia hay dos efectos sobre el consumidor: primero, el precio de  $q_t$  relativo a otros productos cambia. Segundo, debido al cambio en  $p_t$ , el ingreso real del consumidor también cambia. El cambio del consumo óptimo como resultado de un cambio en el precio contiene ambos efectos.

El efecto sustitución es el efecto obtenido solo por el cambio de precios relativos, manteniendo constante el ingreso real. Mientras que el efecto ingreso es el efecto obtenido solo por el cambio en el ingreso real.

La tasa de interés representa el precio relativo de la canasta en el periodo "t+1" ( $c_{t+1}$ ) con respecto a hoy ( $c_t$ ). Por tanto, un cambio en la tasa de interés producirá dos



efectos: sustitución e ingreso.

**Efecto sustitución (ES):** un incremento en la tasa de interés real hace que el consumo de mañana  $c_{t+1}$  sea relativamente menos costoso comparado con el consumo de hoy  $c_t$ . Esto se debe a que el ahorro es más rentable para alcanzar el mismo monto de consumo mañana; es decir, el consumidor necesita sacrificar menos consumo hoy. Por tanto, el efecto sustitución se resume en:

$$\uparrow R_t \xrightarrow{\text{Efecto Sustitución}} \downarrow c_t \text{ y } \uparrow c_{t+1}$$

Cabe mencionar que la ecuación de Euler refleja el efecto sustitución del consumo. Además,  $\sigma$  es la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.

$$\hat{c}_t = E_t \left[ \hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma} \hat{R}_{t+1} \right]$$

La magnitud del efecto sustitución es controlado por  $\sigma$ , mientras más grande sea  $\sigma$  mayor será el efecto sustitución; es decir:

$$\uparrow R_t \xrightarrow{\text{Efecto Sustitución}} \downarrow\downarrow c_t \text{ y } \uparrow\uparrow c_{t+1}$$

**Efecto ingreso (EI):** un incremento de la tasa de interés produce un efecto ingreso. Si el consumidor tiene activos (bonos o ahorro), un incremento de la tasa de interés produce mayores ganancias por esos activos y por tanto mayor ingreso. Este efecto tiende a incrementar el consumo en todos los periodos.

$$\uparrow R_t \xrightarrow{\text{Efecto Ingreso}} \uparrow c_t \text{ y } \uparrow c_{t+1}$$

Cabe mencionar que la restricción presupuestaria refleja el efecto ingreso:

$$c_t + i_t = r_t k_t$$

| Un incremento de la tasa de interés produce dos efectos: |                         |   |             |                              |
|--|-------------------------|---|-------------|------------------------------|
| ES →   | ↓ $c_t$                 | y | ↑ $c_{t+1}$ | (Ecuación de Euler)          |
| EI →   | ↑ $c_t$                 | y | ↑ $c_{t+1}$ | (Restricción presupuestaria) |
| ET →   | Depende de ESI $\sigma$ |   | y           | ↑ $c_{t+1}$                  |

**Efecto total (ET):** para observar el efecto final de la tasa de interés sobre el consumo basaremos en la restricción presupuestaria y la ecuación de Euler (de las variables en niveles).

$$c_t + i_t = r_k k_t \quad (40)$$

pero se sabe :

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

despejando  $i_t$  :

$$i_t = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t \quad (41)$$

(41) en (40) :

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = r_k k_t$$

$$c_t + k_{t+1} = \underbrace{(r_k + (1 - \delta))}_{R_t} k_t$$

$$c_t + k_{t+1} = R_t k_t \quad (42)$$

Como se sabe el ingreso de la familia representativa en “t” es  $R_t k_t$ , la cual se resumirá en  $A_t$ . De igual forma para el ingreso en “t+1”:  $R_{t+1} k_{t+1} = A_{t+1}$ . Reescribiendo la ecuación (42) en términos de ingreso se tiene:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} &= R_t k_t \\ c_t + \frac{R_{t+1} k_{t+1}}{R_{t+1}} &= R_t k_t \\ c_t + \frac{A_{t+1}}{R_{t+1}} &= A_t \end{aligned} \quad (43)$$

La ecuación (43) es una ecuación en diferencias, la cual se puede resolver iterando hacia adelante. Por inducción matemática hacemos lo siguiente:

$$A_t = c_t + \frac{A_{t+1}}{R_{t+1}} \quad (44)$$

$$A_{t+1} = c_{t+1} + \frac{A_{t+2}}{R_{t+2}} \quad (45)$$

$$A_{t+2} = c_{t+2} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+3}} \quad (46)$$

Luego la ecuación (46) se reemplaza en (45):

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= c_{t+1} + \frac{A_{t+2}}{R_{t+2}} \\ A_{t+1} &= c_{t+1} + \frac{1}{R_{t+2}} (c_{t+2} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+3}}) \\ A_{t+1} &= c_{t+1} + \frac{c_{t+2}}{R_{t+2}} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+2} R_{t+3}} \end{aligned} \quad (47)$$

La ecuación (47) se reemplaza en (44):

$$\begin{aligned}
 A_t &= c_t + \frac{A_{t+1}}{R_{t+1}} \\
 A_t &= c_t + \frac{1}{R_{t+1}} \left( c_{t+1} + \frac{c_{t+2}}{R_{t+2}} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+2}R_{t+3}} \right) \\
 A_t &= c_t + \frac{c_{t+1}}{R_{t+1}} + \frac{c_{t+2}}{R_{t+1}R_{t+2}} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+1}R_{t+2}R_{t+3}} \tag{48}
 \end{aligned}$$

Dividiendo toda la ecuación (48) por  $R_t$  para hacer una generalización (en sumatoria) más sencilla:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_t}{R_t} &= \frac{c_t}{R_t} + \frac{c_{t+1}}{R_t R_{t+1}} + \frac{c_{t+2}}{R_t R_{t+1} R_{t+2}} + \frac{A_{t+3}}{R_t R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3}} \\
 \text{resumiendo} &: \text{ en una sumatoria...} \\
 \frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^2 \frac{c_{t+s}}{\prod_{j=0}^s R_{t+j}} + \frac{A_{t+3}}{\prod_{j=0}^3 R_{t+j}} \tag{49} \\
 \text{generalizando para "n"} &: \\
 \frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^n \frac{c_{t+s}}{\prod_{j=0}^s R_{t+j}} + \frac{A_{t+(n+1)}}{\prod_{j=0}^{n+1} R_{t+j}} \\
 \text{aplicando Limite cuando} &: n \rightarrow \infty \\
 \frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{t+s}}{\prod_{j=0}^s R_{t+j}} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{t+(n+1)}}{\prod_{j=0}^{n+1} R_{t+j}}}_{=0(\text{por transversalidad})} \\
 \frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{t+s}}{\prod_{j=0}^s R_{t+j}} \tag{50}
 \end{aligned}$$

Para encontrar la relación de la tasa de interés con el consumo de hoy es necesario encontrar la relación del  $c_{t+s}$  con el consumo actual  $c_t$ , para ello se usa la ecuación de Euler (abstrayendo el operador expectativa) para "t", "t + 1" y "t + 2":

$$\begin{aligned}
 c_t^{-\gamma} &= \beta c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} \\
 c_{t+1}^{-\gamma} &= \beta c_{t+2}^{-\gamma} R_{t+2} \\
 c_{t+2}^{-\gamma} &= \beta c_{t+3}^{-\gamma} R_{t+3}
 \end{aligned}$$

Multiplicando estas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
c_t^{-\gamma} c_{t+1}^{-\gamma} c_{t+2}^{-\gamma} &= \beta^3 c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} c_{t+2}^{-\gamma} R_{t+2} c_{t+3}^{-\gamma} R_{t+3} \\
c_t^{-\gamma} &= \beta^3 c_{t+3}^{-\gamma} \frac{R_t}{R_t} R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3} \\
c_t^{-\gamma} &= \beta^3 \frac{c_{t+3}^{-\gamma}}{R_t} \prod_{j=0}^3 R_{t+j}
\end{aligned}$$

generalizando para “s” :

$$\begin{aligned}
c_t^{-\gamma} &= \beta^s \frac{c_{t+s}^{-\gamma}}{R_t} \prod_{j=0}^s R_{t+j} \\
\left( \frac{c_{t+s}}{c_t} \right)^{-\gamma} &= \frac{R_t}{\beta^s \prod_{j=0}^s R_{t+j}}
\end{aligned}$$

despejando  $c_{t+s}$  :

$$c_{t+s} = \left[ \frac{R_t}{\beta^s \prod_{j=0}^s R_{t+j}} \right]^{-\frac{1}{\gamma}} c_t \quad (51)$$

Introduciendo la ecuación (51) en la ecuación (50):

$$\begin{aligned}
\frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[ \frac{R_t}{\beta^s \prod_{j=0}^s R_{t+j}} \right]^{-\frac{1}{\gamma}} c_t}{\prod_{j=0}^s R_{t+j}} \\
\frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} \left[ \prod_{j=0}^s R_{t+j} \right]^{\frac{1}{\gamma}-1} c_t R_t^{-1/\gamma} \\
\frac{A_t}{R_t} &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} \left[ \prod_{j=0}^s R_{t+j} \right]^{\frac{1}{\gamma}-1} R_t^{-1/\gamma} \right] \quad (52)
\end{aligned}$$

**Caso simplificado:** para analizar el efecto de la tasa de interés sobre el consumo de hoy  $c_t$  se supone que la tasa de interés es la misma en todos los periodos; es decir,  $R_t = R_{t+1} = R_{t+2} = \dots = R_{t+j} = R$ . Introduciendo este supuesto en la productoria de la ecuación (52) se tiene:

$$\prod_{j=0}^s R_{t+j} = R_{s+1}$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (52) se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{A_t}{R} &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} [R^{s+1}]^{\frac{1}{\gamma}-1} R^{-1/\gamma} \right] \\
\frac{A_t}{R} &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} R^{(s+1)\frac{1}{\gamma}-1} R^{-1/\gamma} \right] \\
\frac{A_t}{R} &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} R^{(s(\frac{1}{\gamma}-1)+\frac{1}{\gamma}-1)} R^{-1/\gamma} \right] \\
\frac{A_t}{R} &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} R^{s(\frac{1}{\gamma}-1)} R^{-1} \right] \\
A_t &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} R^{s(\frac{1}{\gamma}-1)} \right] \\
A_t &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \left( \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)^s \right] \tag{53}
\end{aligned}$$

Por progresión geométrica de  $\sum_{s=0}^{\infty} \left( \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)^s$  se tiene que:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left( \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)^s = 1 + \left( \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \right) + \left( \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)^2 + \left( \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)^3 \dots = \frac{1}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}} \tag{54}$$

Reemplazando la expresión (54) en la ecuación (53) se tiene:

$$\begin{aligned}
A_t &= c_t \left[ \frac{1}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}} \right] \\
c_t &= A_t [1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}] \tag{55}
\end{aligned}$$

Aplicando logaritmo a la ecuación (55) se tiene:

$$\ln(A_t) = \ln(c_t) + \ln[1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}] \tag{56}$$

Aplicando la aproximación de Taylor de primer orden a  $\ln[1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}]$  se tiene que:

$$\ln[1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}] \approx -\beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \tag{57}$$

Reemplazando (57) en (56):

$$\ln(A_t) = \ln(c_t) + \beta^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \tag{58}$$

Tomando diferencial a la ecuación (58) y considerando que  $A_t$  no cambia, y además,  $\frac{1}{\gamma} = \sigma$  (ESI), entonces:

$$\begin{aligned}
\Delta \ln(c_t) &= -(\sigma - 1) \beta^{\sigma} R^{\sigma} \Delta R \\
\frac{\Delta \ln(c_t)}{\Delta R} &= -(\sigma - 1) \beta^{\sigma} R^{\sigma} \tag{59}
\end{aligned}$$

La ecuación (59) refleja el efecto final sobre el consumo de hoy un movimiento de la tasa de interés real. Una conclusión importante es que el **efecto final** depende de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo ( $\sigma$ ). La expresión siguiente muestra el efecto final sobre el consumo dependiendo del valor de la ESI:

$$\begin{aligned}\sigma < 1 &\rightarrow \frac{\Delta \ln(c_t)}{\Delta R} > 0 \rightarrow \uparrow c_t \\ \sigma = 1 &\rightarrow \frac{\Delta \ln(c_t)}{\Delta R} = 0 \rightarrow R \text{ no afecta el consumo} \\ \sigma > 1 &\rightarrow \frac{\Delta \ln(c_t)}{\Delta R} < 0 \rightarrow \downarrow c_t\end{aligned}$$

**Caso general:** considerando la ecuación (52) y desarrollandola se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{A_t}{R_t} &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} \left[ \prod_{j=0}^s R_{t+j} \right]^{\frac{1}{\gamma}-1} R_t^{-1/\gamma} \right] \\ \frac{A_t}{R_t^{1-1/\gamma}} &= c_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} \left[ \prod_{j=0}^s R_{t+j} \right]^{\frac{1}{\gamma}-1} \right] \\ &\text{siendo explícito en la sumatoria:} \\ \frac{A_t}{R_t^{1-1/\gamma}} &= c_t \left[ 1 + \underbrace{\beta^{\frac{1}{\gamma}} (R_t R_{t+1})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \beta^{\frac{2}{\gamma}} (R_t R_{t+1} R_{t+2})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \beta^{\frac{3}{\gamma}} (R_t R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3})^{\frac{1}{\gamma}-1} \dots}_{N_t} \right] \\ A_t &= c_t R_t^{1-1/\gamma} [1 + N_t] \\ A_t &= c_t R_t^{1-1/\gamma} + c_t R_t^{1-1/\gamma} N_t\end{aligned}\tag{60}$$

Diferenciando la ecuación (60) con respecto a  $R_{t+1}$  y considerando que  $R_j$  ( $j \neq 1$ ) no depende de  $R_{t+1}$ :

$$\frac{\Delta A_t}{\Delta R_{t+1}} = R_t^{1-1/\gamma} \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} + \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} R_t^{1-1/\gamma} N_t + c_t R_t^{1-1/\gamma} \frac{\Delta N_t}{\Delta R_{t+1}}\tag{61}$$

Desarrollando el diferencial:  $\frac{\Delta N_t}{\Delta R_{t+1}}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta N_t}{\Delta R_{t+1}} &= \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\beta^{\frac{1}{\gamma}}(R_t R_{t+1})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_t + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\beta^{\frac{2}{\gamma}}(R_t R_{t+1} R_{t+2})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_t R_{t+2} + \\
&\quad \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\beta^{\frac{3}{\gamma}}(R_t R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_t R_{t+2} R_{t+3} + \dots \\
&\quad \text{multiplicando y dividiendo por } R_{t+1} \\
&= \frac{1}{R_{t+1}} \left[ \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\beta^{\frac{1}{\gamma}}(R_t R_{t+1})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_t R_{t+1} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\beta^{\frac{2}{\gamma}}(R_t R_{t+1} R_{t+2})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_t R_{t+1} R_{t+2} + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\beta^{\frac{3}{\gamma}}(R_t R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_t R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{R_{t+1}} \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \left[ \beta^{\frac{1}{\gamma}}(R_t R_{t+1})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \beta^{\frac{2}{\gamma}}(R_t R_{t+1} R_{t+2})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \beta^{\frac{3}{\gamma}}(R_t R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{R_{t+1}} \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) N_t \\
&= \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{N_t}{R_{t+1}} \tag{62}
\end{aligned}$$

Introduciendo la ecuación (62) en la ecuación (61):

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta A_t}{\Delta R_{t+1}} &= R_t^{1-1/\gamma} \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} + \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} R_t^{1-1/\gamma} N_t + c_t R_t^{1-1/\gamma} \frac{\Delta N_t}{\Delta R_{t+1}} \tag{63} \\
\frac{\Delta A_t}{\Delta R_{t+1}} &= R_t^{1-1/\gamma} \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} + \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} R_t^{1-1/\gamma} N_t + c_t R_t^{1-1/\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{N_t}{R_{t+1}} \\
\Delta A_t &= R_t^{1-1/\gamma} \Delta c_t + \Delta c_t R_t^{1-1/\gamma} N_t + \Delta R_{t+1} c_t R_t^{1-1/\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{N_t}{R_{t+1}}
\end{aligned}$$

Se sabe que  $\Delta A_t = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= R_t^{1-1/\gamma} \Delta c_t + \Delta c_t R_t^{1-1/\gamma} N_t + \Delta R_{t+1} c_t R_t^{1-1/\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{N_t}{R_{t+1}} \\
0 &= R_t^{1-1/\gamma} \left[ \Delta c_t + \Delta c_t N_t + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) c_t N_t \frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \right] \\
0 &= \Delta c_t + \Delta c_t N_t + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) c_t N_t \frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \\
0 &= \Delta c_t [1 + N_t] + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) c_t N_t \frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}}
\end{aligned}$$

Ordenando algebraicamente los términos, se tiene:

$$\begin{aligned}
-\Delta c_t [1 + N_t] &= \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) c_t N_t \frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \\
-\frac{\Delta c_t [1 + N_t]}{c_t N_t} &= \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \\
\frac{\Delta c_t}{c_t} &= -\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{N_t}{1 + N_t} \frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \tag{64}
\end{aligned}$$

De la ecuación (64) se puede concluir que el impacto de la tasa de interés del periodo siguiente sobre el consumo de hoy es gobernada por la elasticidad de sustitución del consumo ( $\frac{1}{\gamma} = \sigma$ ), tal como se observó en el caso simplificado.

## 6. Solución del sistema lineal

En el capítulo 1 y 3 se señaló que en la literatura existen varios métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. En el capítulo 3 se ilustró el método de Blanchard y Kahn (1981) y dada la naturaleza del modelo de Longy Plosser (1983) se pudo obtener la solución analíticamente también. En este capítulo se utilizará el método de coeficientes indeterminados de Uhlig (1999) con el fin de tener un panorama de los distintos métodos de solución.

### 6.1. Método de coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados busca que las variables de control estén en función de las variables de estado ( $\hat{k}_t$ ) y de la variable exógena ( $\hat{a}_t$ ). Es decir, de la misma forma que el método de Blanchard y Kahn, este método busca la función de política y la función de estado.

Al analizar si cada ecuación log-lineal se encuentra en función del capital ( $\hat{k}_t$ ) y de la productividad ( $\hat{a}_t$ ) se observa, en el cuadro [5], que la ecuación [2] (función de producción) y la ecuación [3] (demanda de capital que considera la tasa de interés bruta) dependen de dichas variables. Además la ecuación [5] describe la productividad.

Al introducir la demanda de capital en la ecuación de Euler, dicha ecuación estaría en función del capital y de la productividad:

$$\hat{c}_t = E_t(\hat{c}_{t+1} - \sigma\lambda_3(\hat{a}_{t+1} - \hat{k}_{t+1})) \quad (65)$$

De otro lado, la ley de movimiento del capital contiene a la variable de estado y al choque:

$$\hat{k}_{t+1} = \lambda_1\hat{k}_t + \lambda_2\hat{a}_t + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\hat{c}_t \quad (66)$$

Por tanto, si encontramos el  $\hat{c}_t$  y  $\hat{k}_{t+1}$  en función de  $(\hat{k}_t, \hat{a}_t)$ , el sistema estaría solucionado. Para ello, bajo el método de coeficientes indeterminados, se propone la siguiente solución:

$$\hat{c}_t = \eta_{ck}\hat{k}_t + \eta_{ca}\hat{a}_t \quad (67)$$

$$\hat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\hat{k}_t + \eta_{ka}\hat{a}_t \quad (68)$$

En este contexto, el problema radica en encontrar los valores de los coeficientes:  $\eta_{ck}$ ,  $\eta_{ca}$ ,  $\eta_{kk}$ ,  $\eta_{ka}$ . Con este fin, el análisis se realizará en cinco pasos:

[1] **Ecuación de Euler:** al reemplazar la solución propuesta en la ecuación de Euler (65) se obtiene una expresión para los coeficientes  $\eta_{ca}$  y  $\eta_{ck}$ :

$$\eta_{ca} = \frac{\eta_{ka}(\sigma\lambda_3 + \eta_{ck}) - \phi\sigma\lambda_3}{1 - \phi} \rightarrow \eta_{ca} = f(\eta_{ka}, \eta_{ck}) \quad (69)$$

$$\eta_{ck} = \frac{\eta_{kk}\sigma\lambda_3}{1 - \eta_{kk}} \rightarrow \eta_{ck} = f(\eta_{kk}) \quad (70)$$



[2] **Ecuación del capital:** al reemplazar la solución propuesta en la ecuación de movimiento del capital (66) se obtiene una expresión para los coeficientes  $\eta_{kk}$  y  $\eta_{ka}$ :

$$\eta_{kk} = \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ck} \rightarrow \eta_{kk} = f(\eta_{ck}) \quad (71)$$

$$\eta_{ka} = \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ca} \rightarrow \eta_{ka} = f(\eta_{ca}) \quad (72)$$

[3] **Primer coeficiente:** para hallar  $\eta_{ck}$  elegimos (70) y (71):

$$\eta_{ck} = f(\eta_{kk}) :$$

$$\eta_{ck} = \frac{\eta_{kk}\sigma\lambda_3}{1 - \eta_{kk}} \quad (73)$$

$$\eta_{kk} = f(\eta_{ck}) :$$

$$\eta_{kk} = \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ck} \quad (74)$$

[4] **Encontrando  $\eta_{ck}$ :** la ecuación (74) se reemplaza en (73), de la cual se obtiene:

$$Q_2\eta_{ck}^2 + Q_1\eta_{ck} + Q_0 = 0 \quad (75)$$

Donde, en primer lugar las dos raíces de esta ecuación representan los dos valores que puede tomar  $\eta_{ck}$ . En segundo lugar, el valor de este coeficiente permite obtener el valor de los tres restantes, y finalmente, los valores de  $Q_i$  son:

$$\begin{aligned} Q_2 &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ Q_1 &= \lambda_1 - 1 + \sigma\lambda_3(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \\ Q_0 &= \lambda_1\sigma\lambda_3 \end{aligned}$$

Al resolver la ecuación (75) se obtiene los dos valores de  $\eta_{ck}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{ck1} &= \frac{-Q_1 + \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2} \\ \eta_{ck2} &= \frac{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2} \end{aligned}$$

El signo de  $\eta_{ck}$  que se debe de elegir es positivo porque esto permite que  $\eta_{kk}$  sea menor a uno, lo cual indica que la ecuación del capital es estable (no explosiva). Para ello, se evalúa el signo de cada  $Q_i$ :

- $Q_2 < 0$  (porque  $\lambda_1 > 1$  y  $\lambda_2 > 0$ )
- $Q_0 > 0$
- $Q_1 > 0$  ( $Q_1 = \lambda_1 - 1 + Q_2Q_0/\lambda_1$ )

De lo anterior, se demuestra que  $\eta_{ck2}$  tiene signo positivo, por tanto se elige esta raíz. Esto permite obtener los dos coeficientes  $\eta_{ck}$  y  $\eta_{kk}$ :

$$\eta_{ck} = \frac{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2} \quad (76)$$

$$\eta_{kk} = \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ck} \quad (77)$$

[5] **Coefficientes restantes:** para hallar los dos coeficientes restantes  $\eta_{ca}$  y  $\eta_{ka}$  se elige la ecuación (69) y (72):

$$\begin{aligned}\eta_{ka} &= \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ca} \rightarrow \eta_{ka} = f(\eta_{ca}) \\ \eta_{ca} &= \frac{\eta_{ka}(\sigma\lambda_3 + \eta_{ck}) - \phi\sigma\lambda_3}{1 - \phi} \rightarrow \eta_{ca} = f(\eta_{ka}, \eta_{ck})\end{aligned}$$

$\eta_{ka}$  y  $\eta_{ca}$ :

$$\begin{aligned}\eta_{ca} &= \frac{-\eta_{ck}\lambda_2 + \sigma\lambda_3(\phi - \lambda_2)}{\phi - 1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)(\eta_{ck} + \sigma\lambda_3)} \\ \eta_{ka} &= \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ca}\end{aligned}$$

Con los parámetros calibrados para el modelo base se obtiene que:  $\eta_{ck} = 0.3253$ ,  $\eta_{ca} = 0.2643$ ,  $\eta_{kk} = 0.9841$  y  $\eta_{ka} = 0.0551$ . Finalmente, la solución del modelo para cada una de las variables endógenas son:

Solución para el consumo:

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t \quad (78)$$

Solución para el capital:

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \quad (79)$$

Solución para el producto:

$$\widehat{y}_t = (1 - \alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{a}_t \quad (80)$$

Solución para la inversión:

$$\begin{aligned}\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\ \widehat{i}_t &= \frac{y_{ss}}{i_{ss}}\left(\widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t\right)\end{aligned}$$

Reemplazando (78) y (80):

$$\widehat{i}_t = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}\left(1 - \alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck}\right)\widehat{k}_t + \frac{y_{ss}}{i_{ss}}\left(\alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca}\right)\widehat{a}_t \quad (81)$$

Solución (tasa de interés neta):

$$\widehat{r}_t = \alpha(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t) \quad (82)$$

Solución (tasa de interés bruta):

$$\widehat{R}_t = \alpha\frac{r_{ss}}{R_{ss}}(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t) \quad (83)$$

## 6.2. Análisis de elasticidades

Los coeficientes de la solución de cada una de las variables representan elasticidades. Esto se debe a que las variables están expresadas en logaritmos. Por ejemplo para el caso del consumo se tiene:

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t$$

Dado que  $\widehat{c}_t = \ln(\frac{c_t}{c_{ss}})$  y de manera similar para las demás variables se tiene:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{c_t}{c_{ss}}\right) &= \eta_{ck} \ln\left(\frac{k_t}{k_{ss}}\right) + \eta_{ca} \ln\left(\frac{a_t}{a_{ss}}\right) \\ \ln(c_t) - \ln(c_{ss}) &= \eta_{ck}(\ln(k_t) - \ln(k_{ss})) + \eta_{ca}(\ln(a_t) - \ln(a_{ss})) \\ \ln(c_t) &= -[\ln(c_{ss}) + \ln(k_{ss}) + \ln(a_{ss})] + \eta_{ck} \ln(k_t) + \eta_{ca} \ln(a_t) \end{aligned}$$

Tomando diferencial con respecto al capital ( $k_t$ ) se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta \ln(c_t) &= \eta_{ck} \Delta \ln(k_t) \\ \frac{\Delta c_t}{c_t} &= \eta_{ck} \frac{\Delta k_t}{k_t} \\ \frac{\frac{\Delta c_t}{c_t}}{\frac{\Delta k_t}{k_t}} &= \eta_{ck} \\ \text{Elasticidad}_{c_t, k_t} &= \eta_{ck} \end{aligned} \tag{84}$$

Como se puede observar la ecuación (84),  $\eta_{ck}$  refleja la elasticidad del consumo ante un cambio del capital. En particular,  $\eta_{ck}$  mide el efecto del capital (“ $k_t$ ”) sobre el consumo actual (“ $c_t$ ”), manteniendo constante la productividad (“ $a_t$ ”); es decir, si el capital aumenta 1%, el consumo aumenta en  $\eta_{ck}$ %. De esta forma se lee todos los coeficientes de la solución del sistema log-lineal. El cuadro [6] resume las elasticidades.

**Cuadro 6:** Coeficientes (elasticidades) de la solución del modelo lineal

| Elasticidad   | Expresión   | Valor  |
|---|---|--------|
| Elasticidad del consumo al capital: $\eta_{ck}$                   | $\eta_{ck} = \frac{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2}$  | 0.3253 |
| Elasticidad del consumo a la productividad: $\eta_{ca}$           | $\eta_{ca} = \frac{-\eta_{ck}\lambda_2 + \sigma\lambda_3(\phi - \lambda_2)}{\phi - 1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)(\eta_{ck} + \sigma\lambda_3)}$ | 0.2643 |
| Elasticidad del capital de mañana al capital de hoy: $\eta_{kk}$  | $\eta_{kk} = \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ck}$  | 0.9841 |
| Elasticidad del capital de mañana a la productividad: $\eta_{ka}$ | $\eta_{ka} = \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ca}$  | 0.0551 |

**Nota:** La expresión de las elasticidades y sus valores están en “Campbell\_Lfijo.m” (sección 2).

En el análisis de elasticidades dos parámetros son importantes: la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo  $\sigma$  y la persistencia del choque  $\phi$ . Para ver cómo estos parámetros influyen sobre las elasticidades vamos a revisar cada una de las elasticidades.

**Revisando  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ :**

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (1 - \delta) + \delta(1 - \alpha) \frac{y_{ss}}{i_{ss}} \\
&= (1 - \delta) + \delta(1 - \alpha) \left( \frac{1}{\delta} k_{ss}^{-\alpha} \right) \\
&= (1 - \delta) + (1 - \alpha) \frac{r_{ss}}{1 - \alpha} \\
&= (1 - \delta) + \left( \frac{1}{\beta} - (1 - \delta) \right) \\
&= \frac{1}{\beta} \\
\lambda_1 &= F(\beta)
\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \delta \alpha \frac{y_{ss}}{i_{ss}} \\
&= \delta \alpha \left( \frac{1}{\delta} k_{ss}^{-\alpha} \right) \\
&= \alpha \frac{r_{ss}}{1 - \alpha} \\
&= \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{\beta} - (1 - \delta) \right) \\
\lambda_2 &= F(\alpha, \beta, \delta)
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \alpha \frac{r_{ss}}{R_{ss}} \\
&= \alpha \frac{\frac{1}{\beta} - (1 - \delta)}{\frac{1}{\beta}} \\
&= \alpha(1 - \beta(1 - \delta)) \\
\lambda_3 &= F(\alpha, \beta, \delta)
\end{aligned} \tag{87}$$

**Revisando  $Q_0$ ,  $Q_1$  y  $Q_2$ :**

$$\begin{aligned}
Q_2 &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\
&= 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right) - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{\beta} - (1 - \delta) \right) \\
&= - \left[ \frac{\frac{1}{\beta} + \alpha\delta - 1}{1 - \alpha} \right] \\
Q_2 &= F(\alpha, \beta, \delta)
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \lambda_1 - 1 + \sigma \lambda_3 (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \\
&= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} - 1 + \sigma \underbrace{\lambda_3 (1 - \lambda_1 - \lambda_2)}_{F(\alpha, \beta, \delta)} \\
Q_1 &= F(\sigma^{(+)} \alpha, \beta, \delta)
\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= \lambda_1 \sigma \lambda_3 \\
 &= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} \sigma \underbrace{\lambda_3}_{F(\alpha, \beta, \delta)} \\
 Q_0 &= F(\sigma^{(+)} \alpha, \beta, \delta)
 \end{aligned} \tag{90}$$

¿De qué parámetros dependen las elasticidades ( $\eta_{ck}$  y  $\eta_{kk}$ )?

Debido a que  $Q_2$  es negativo, el componente dentro del radical es positivo. En ese caso  $\sigma$ , que afecta positivamente a  $Q_0$  y  $Q_1$ , tiene un impacto positivo sobre  $\eta_{ck}$ . De otro lado,  $Q_1$  que se encuentra fuera del radical también traslada el efecto positivo de  $\sigma$  sobre  $\eta_{ck}$ . Cabe mencionar que  $\eta_{ck}$  no depende de la persistencia del choque ( $\phi$ ).

$$\eta_{ck} = \frac{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2} = F(\sigma^{(+)} \alpha, \beta, \delta) \tag{91}$$

De lo anterior se concluye la siguiente observación:

**Observación 1:**  $\eta_{ck}$  se incrementa a medida que se incrementa la elasticidad de sustitución del consumo ( $\sigma$ ).

De otro lado, al analizar el coeficiente  $\eta_{kk}$  se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \eta_{kk} &= \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \eta_{ck} \\
 &= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} + \underbrace{(1 - \lambda_1 - \lambda_2)}_{=-\delta \frac{c_{ss}}{i_{ss}}} \underbrace{\eta_{ck}}_{F(\sigma^{(+)} \alpha, \beta, \delta)} \\
 &= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} - \delta \frac{c_{ss}}{i_{ss}} \underbrace{\eta_{ck}}_{F(\sigma^{(+)} \alpha, \beta, \delta)} \\
 &= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} - \underbrace{\delta \frac{c_{ss}}{i_{ss}}}_{F(\alpha, \beta, \delta)} \underbrace{\eta_{ck}}_{F(\sigma^{(+)} \alpha, \beta, \delta)} \\
 \eta_{kk} &= F(\sigma^{(-)} \alpha, \beta, \delta)
 \end{aligned} \tag{92}$$

De la ecuación (92) se concluye las siguientes observaciones:

**Observación 2:**  $\eta_{ck}$  y  $\eta_{kk}$  no dependen de  $\phi$ .

**Observación 3:**  $\eta_{kk}$  se reduce a medida que se incrementa la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo ( $\sigma$ ).

¿De qué parámetros dependen las elasticidades ( $\eta_{ca}$  y  $\eta_{ka}$ )?

$$\eta_{ca} = \frac{-\eta_{ck} \lambda_2 + \sigma \lambda_3 (\phi - \lambda_2)}{\phi - 1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) (\eta_{ck} + \sigma \lambda_3)} = F(\phi, \sigma, \alpha, \beta, \delta) \tag{93}$$

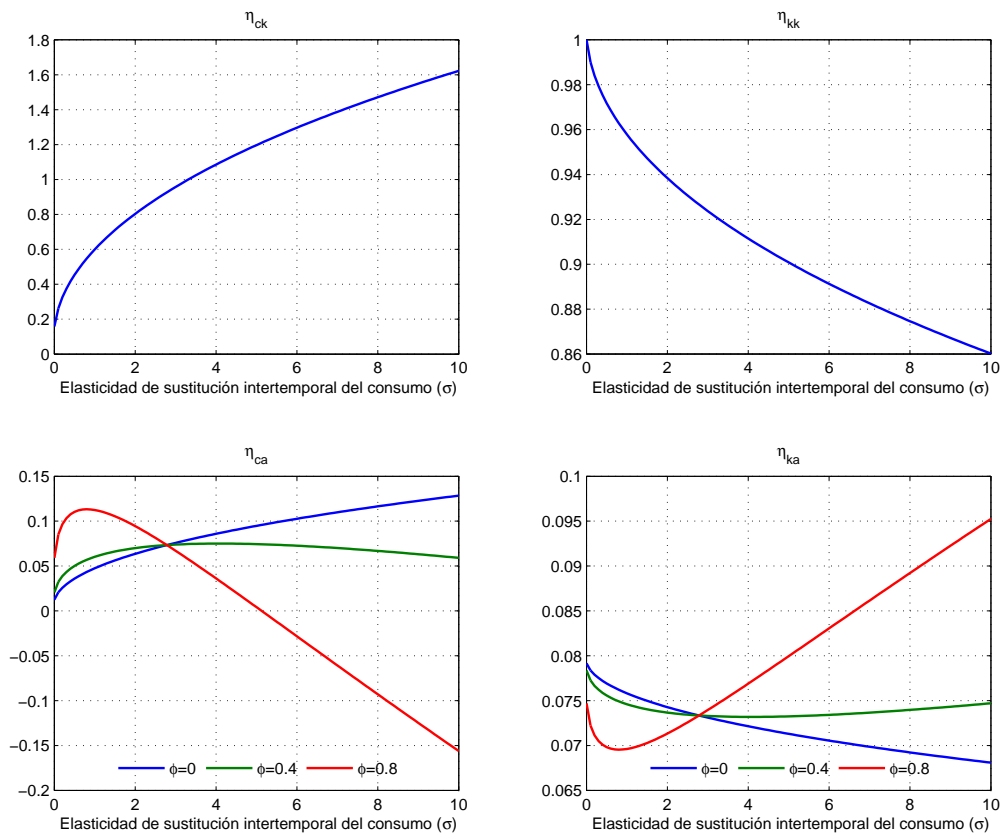
$$\eta_{ka} = \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \eta_{ca} = F(\phi, \sigma, \alpha, \beta, \delta) \tag{94}$$

De la expresión (94) se puede ver que  $\eta_{ca}$  tiene una relación no lineal con  $\phi$  y  $\sigma$ . De manera similar para  $\eta_{ka}$ . De lo anterior se concluye las siguientes observaciones:

**Observación 4:**  $\eta_{ca}$  se incrementa a medida que  $\phi$  aumenta para valores bajos de  $\sigma$  ( $\sigma \leq 1$ ), pero se reduce para valores altos ( $\sigma > 1$ ).

**Observación 5:**  $\eta_{kk}$  y  $\eta_{ka}$  se reducen a medida que se incrementa la elasticidad de sustitución del consumo ( $\sigma$ ).

**Figura 2:** Elasticidades (coeficientes de la solución)



**Nota:** Cabe mencionar que estos gráficos se obtienen del código “Campbell.Lfijo\_Sim\_Parametros.m”

En el cuadro [7] se mencionan tres casos de especial interés.

**Cuadro 7:** Casos especiales

| Caso   | Valor de $\sigma$ | Función de utilidad                                     | Elasticidad                       | Serie de tiempo  |
|--------|-------------------|---|-----------------------------------|--|
| Caso 1 | $\sigma = 0$      | No existe efecto sustitución intertemporal              | $\eta_{kk} = 1$                   | $\ln(c_t)$ es un <i>random walk</i> , y $\ln(k_t)$ y $\ln(y_t)$ cointegran con el $\ln(c_t)$ |
| Caso 2 | $\sigma = 1$      | Función de utilidad logarítmica:<br>$u(c_t) = \ln(c_t)$ |                                   | El efecto sustitución y el efecto ingreso se anulan.   |
| Caso 3 | $\sigma = \infty$ | Función de utilidad lineal:<br>$u(c_t) = c_t$           | $\eta_{kk} = 0, \eta_{ka} = \phi$ | $k_t$ se comporta como un AR(1), mientras $c_t$ y $y_t$ se comportan como un ARMA(1,1)       |

## 7. Representación de series de tiempo

Debido a que se tiene la solución del modelo; es decir, cada variable endógena en función de la variable de estado (capital) y de la variable exógena (productividad), considerando además que la productividad se comporta como un proceso AR(1), entonces se puede hallar la representación de series de tiempo ARMA (p,q) de cada variable.

### 7.1. Serie de tiempo del capital

De la solución del modelo, en particular de la ecuación que describe el comportamiento del capital en  $t + 1$  en función del capital en  $t$  y de la productividad se tiene:

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t$$

Donde los coeficientes  $\eta_{kk}$  y  $\eta_{ka}$  han sido hallados previamente. De esta ecuación se puede encontrar la forma autorregresiva del capital ( $\widehat{k}_{t+1}$ ):

$$\begin{aligned} (1 - \eta_{kk}L)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\widehat{a}_t \\ \widehat{k}_{t+1} &= \frac{\eta_{ka}}{1 - \eta_{kk}L}\widehat{a}_t \end{aligned} \quad (95)$$

$$\text{Además, } \widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$$

Considerando que  $\widehat{a}_t$  se puede expresar como:

$$a_t = \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \quad (96)$$

Entonces se tiene que:

$$\widehat{k}_{t+1} = \frac{\eta_{ka}}{(1 - \eta_{kk}L)(1 - \phi L)}\epsilon_t \quad (97)$$

La expresión anterior demuestra que el capital se comporta como un AR(2): dos raíces reales ( $\phi$  y  $\eta_{kk}$ ) y menores a 1 ( $k_{t+1}$  es estable). La expresión AR(2) del capital es:

$$\begin{aligned}
\widehat{k}_{t+1} &= \frac{\eta_{ka}}{(1 - \eta_{kk}L)} \frac{\epsilon_t}{(1 - \phi L)} \\
(1 - \eta_{kk}L)(1 - \phi L)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\
(1 - \eta_{kk}L - \phi L + \eta_{kk}\phi L^2)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1} - \eta_{kk}\widehat{k}_t - \phi\widehat{k}_t + \eta_{kk}\phi\widehat{k}_{t-1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= (\phi + \eta_{kk})\widehat{k}_t - \eta_{kk}\phi\widehat{k}_{t-1} + \eta_{ka}\epsilon_t \tag{98}
\end{aligned}$$

## 7.2. Serie de tiempo del producto

De igual manera que en el caso del capital, para encontrar la expresión de series de tiempo del producto se parte de la solución del modelo:

$$\widehat{y}_t = \alpha\widehat{a}_t + (1 - \alpha)\widehat{k}_t \tag{99}$$

Para encontrar el modelo de series de tiempo del producto ( $y_t$ ) se reemplaza en la ecuación previa (98) la expresión de la productividad (en función del error) y la expresión del capital (en función de la productividad). Esta última corresponde a la ecuación (96).

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \alpha\widehat{a}_t + (1 - \alpha)\widehat{k}_t \\
\widehat{y}_t &= \alpha\frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} + (1 - \alpha)\frac{\eta_{ka}}{(1 - \eta_{kk}L)}\widehat{a}_{t-1} \\
\widehat{y}_t &= \alpha\frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} + (1 - \alpha)\frac{\eta_{ka}}{(1 - \eta_{kk}L)}\frac{\epsilon_{t-1}}{(1 - \phi L)} \\
\widehat{y}_t &= \alpha\frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} + (1 - \alpha)\frac{\eta_{ka}L}{(1 - \eta_{kk}L)}\frac{\epsilon_t}{(1 - \phi L)} \tag{100}
\end{aligned}$$

La ecuación (100) sugiere que el producto se comporta como un ARMA(2,1):

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \left[ \frac{\alpha + [(1 - \alpha)\eta_{ka} - \alpha\eta_{kk}]L}{(1 - \eta_{kk}L)(1 - \phi L)} \right] \epsilon_t \tag{101} \\
(1 - \eta_{kk}L)(1 - \phi L)\widehat{y}_t &= [\alpha + [(1 - \alpha)\eta_{ka} - \alpha\eta_{kk}]L] \epsilon_t \\
(1 - \eta_{kk}L - \phi L + \eta_{kk}\phi L^2)\widehat{y}_t &= \alpha\epsilon_t + [(1 - \alpha)\eta_{ka} - \alpha\eta_{kk}]\epsilon_{t-1} \\
\widehat{y}_t - \eta_{kk}\widehat{y}_{t-1} - \phi\widehat{y}_{t-1} + \eta_{kk}\phi\widehat{y}_{t-2} &= \alpha\epsilon_t + [(1 - \alpha)\eta_{ka} - \alpha\eta_{kk}]\epsilon_{t-1} \\
\widehat{y}_t &= \underbrace{(\eta_{kk} + \phi)\widehat{y}_{t-1} - \eta_{kk}\phi\widehat{y}_{t-2}}_{AR(2)} + \underbrace{\alpha\epsilon_t + [(1 - \alpha)\eta_{ka} - \alpha\eta_{kk}]\epsilon_{t-1}}_{MA(1)}
\end{aligned}$$

## 7.3. Serie de tiempo del consumo

De la solución del modelo:

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t$$

El consumo se comporta como un ARMA(2,1)

$$\widehat{c}_t = \left[ \frac{\eta_{ca} + (\eta_{ck}\eta_{ka} - \eta_{ca}\eta_{kk})L}{(1 - \eta_{kk}L)(1 - \phi L)} \right] \epsilon_t \tag{102}$$



#### 7.4. Serie de tiempo de la tasa de interés real bruta

De la solución del modelo:

$$\widehat{R}_{t+1} = \lambda_3(\widehat{a}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1})$$

La tasa de interés se comporta como un ARMA(2,1)

$$\widehat{R}_{t+1} = \lambda_3 \left[ \frac{(1 - \eta_{ka} - \eta_{kk}L)}{(1 - \eta_{kk}L)(1 - \phi L)} \right] \epsilon_t \quad (103)$$

#### 7.5. Serie de tiempo de la inversión

De la solución para la inversión (ecuación (81)):

$$\begin{aligned} \widehat{i}_t &= \underbrace{\left(1 - \alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck}\right)}_{\eta_{ik}} \widehat{k}_t + \underbrace{\left(\alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca}\right)}_{\eta_{ia}} \widehat{a}_t \\ \widehat{i}_t &= \eta_{ik}\widehat{k}_t + \eta_{ia}\widehat{a}_t \\ \widehat{i}_t &= \eta_{ik} \frac{\eta_{ka}}{(1 - \eta_{kk}L)} \frac{\epsilon_{t-1}}{(1 - \phi L)} + \eta_{ia} \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\ \widehat{i}_t &= \left[ \eta_{ik} \frac{\eta_{ka}L}{(1 - \eta_{kk}L)} + \eta_{ia} \right] \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\ \widehat{i}_t &= \left[ \frac{\eta_{ik}\eta_{ka}L + \eta_{ia}(1 - \eta_{kk}L)}{(1 - \eta_{kk}L)} \right] \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\ \widehat{i}_t &= \left[ \frac{\eta_{ia} + (\eta_{ik}\eta_{ka} - \eta_{ia}\eta_{kk})L}{(1 - \eta_{kk}L)} \right] \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \end{aligned}$$

Por tanto, la inversión se comporta como un ARMA(2,1):

$$\widehat{i}_t = \left[ \frac{\eta_{ia} + (\eta_{ik}\eta_{ka} - \eta_{ia}\eta_{kk})L}{(1 - \eta_{kk}L)(1 - \phi L)} \right] \epsilon_t \quad (104)$$

### 8. Funciones impulso-respuesta

La construcción de la función impulso-respuesta de las variables endógenas requiere de dos etapas. En la primera etapa se transforma la forma autorregresiva del capital AR(2) a su versión de media móviles MA( $\infty$ ). En la segunda etapa se cuantifica el impacto, en cada periodo, de un choque temporal (de un solo periodo) en cada variable endógena.

**Primera etapa:** se obtiene la forma MA( $\infty$ ) del capital.

$$\begin{aligned} \widehat{k}_{t+1} &= \underbrace{(\phi + \eta_{kk})}_{\phi_1} \widehat{k}_t + \underbrace{-\eta_{kk}\phi}_{\phi_2} \widehat{k}_{t-1} + \eta_{ka}\epsilon_t \\ \widehat{k}_{t+1} &= \phi_1 \widehat{k}_{t-1} + \phi_2 \widehat{k}_t + \eta_{ka}\epsilon_t \\ (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) \widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \end{aligned}$$

Calculando las raíces del AR(2):

$$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$$

En factores:

$$(L - y_1)(L - y_2) = 0$$

Factorizando  $y_1$  del primer factor e  $y_2$  del segundo:

$$y_1 \left( \frac{1}{y_1} L - 1 \right) y_2 \left( \frac{1}{y_2} L - 1 \right) = 0$$

La expresión se reduce a:

$$\left( \underbrace{\frac{1}{y_1} L - 1}_{\theta_1} \right) \left( \underbrace{\frac{1}{y_2} L - 1}_{\theta_2} \right) = 0$$

Multiplicando por (-) a ambos términos:

$$(1 - \theta_1 L)(1 - \theta_2 L) = 0$$

Por tanto: equivalencia de raíces

$$(L - y_1)(L - y_2) = (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_2 L) = 0$$

Donde:

- $\theta_1 = \frac{1}{y_1}$
- $\theta_2 = \frac{1}{y_2}$

Utilizando la equivalencia de raíces del AR(2):

$$\begin{aligned} (L - y_1)(L - y_2)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\ (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_2 L)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\ \widehat{k}_{t+1} &= \underbrace{\frac{1}{(1 - \theta_1 L)(1 - \theta_2 L)}}_{\Psi(L)} \eta_{ka}\epsilon_t \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Psi(L) &= 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \dots + \psi_k L^k + \dots \\ \psi_k &= \sum_{j=0}^k \theta_1^j \theta_2^{k-j} \end{aligned}$$

Versión MA( $\infty$ ) del capital:

$$\widehat{k}_{t+1} = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \dots) \eta_{ka} \epsilon_t \quad (105)$$

Con esta expresión calculamos la función impulso-respuesta. La versión extendida de la ecuación (105) es:

$$\begin{aligned}\widehat{k}_{t+1} &= (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \dots)\eta_{ka}\epsilon_t \\ \widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t + (\psi_1\eta_{ka})\epsilon_{t-1} + (\psi_2\eta_{ka})\epsilon_{t-2} + (\psi_3\eta_{ka})\epsilon_{t-3} + \dots\end{aligned}\quad (106)$$

**Segunda etapa:** en esta etapa se calcula la función impulso-respuesta del capital ante un choque de productividad. En este caso para el cálculo de la función impulso respuesta del capital se considera que el impulso o choque  $\epsilon_t$  se realiza en un solo periodo (el periodo uno) y que toma el valor de una desviación estándar  $\sigma_\epsilon$ , el cual se asume que es igual a uno; es decir, en  $t = 1$ ,  $\epsilon_1 = \sigma_\epsilon = 1$ . El error ( $\epsilon_t$ ) tomar el valor de cero durante los periodos antes del choque y después del choque. El cuadro [8] muestra la construcción de la función impulso-respuesta del capital.

**Cuadro 8:** Construcción de la función impulso-respuesta del capital

| t | $\epsilon_t$     | Versión MA( $\infty$ ) de $\widehat{k}_{t+1}$   | IFR de $\widehat{k}_{t+1}$                  |
|---|------------------|---|---|
| 0 | $\epsilon_0 = 0$ | $\widehat{k}_1 = \eta_{ka} \underbrace{\epsilon_0}_{=0} + (\psi_1\eta_{ka}) \underbrace{\epsilon_{-1}}_{=0} + \dots$  | $\widehat{k}_1 = \eta_{ka}\epsilon_0$       |
| 1 | $\epsilon_1 = 1$ | $\widehat{k}_2 = \eta_{ka} \underbrace{\epsilon_1}_{=1} + (\psi_1\eta_{ka}) \underbrace{\epsilon_0}_{=0} + \dots$   | $\widehat{k}_2 = \eta_{ka}\epsilon_1$       |
| 2 | $\epsilon_2 = 0$ | $\widehat{k}_3 = \eta_{ka} \underbrace{\epsilon_2}_{=0} + (\psi_1\eta_{ka}) \underbrace{\epsilon_1}_{=1} + (\psi_2\eta_{ka}) \underbrace{\epsilon_0}_{=0} + \dots$  | $\widehat{k}_3 = \psi_1\eta_{ka}\epsilon_1$ |
| 3 | $\epsilon_3 = 0$ | $\widehat{k}_4 = \eta_{ka} \underbrace{\epsilon_3}_{=0} + (\psi_1\eta_{ka}) \underbrace{\epsilon_2}_{=0} + (\psi_2\eta_{ka}) \underbrace{\epsilon_1}_{=1} + (\psi_3\eta_{ka}) \underbrace{\epsilon_0}_{=0} + \dots$ | $\widehat{k}_4 = \psi_2\eta_{ka}\epsilon_1$ |
| 4 | $\epsilon_4 = 0$ | ...   | $\widehat{k}_5 = \psi_3\eta_{ka}\epsilon_1$ |

En  $t = 0$  todas las variables se encuentran en su estado estacionario. El capital en  $t = 1$ , el cual se determina en  $t = 0$ , también se encuentra en estado estacionario. Tal es así que se cumple la ley de movimiento del capital:  $k_1 = (1 - \delta)k_0 + i_0$ , donde  $k_1 = k_0 = k_{ss}$ . El choque de productividad se realiza en el periodo  $t = 1$  produciendo los siguientes efectos:

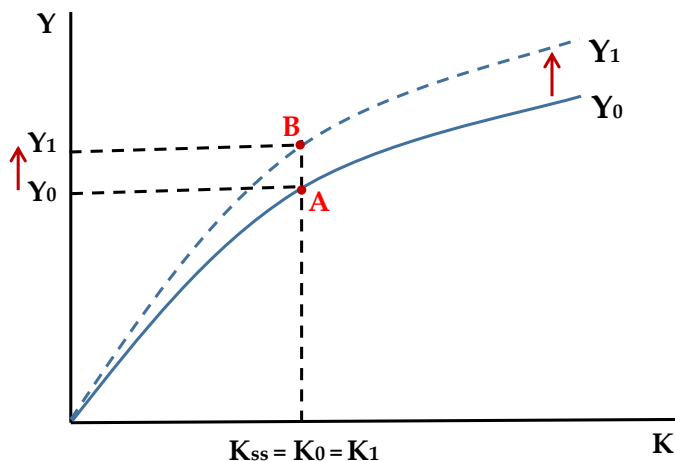
**1er Efecto (sobre las empresas):** un incremento de la productividad produce un incremento en la función de producción para cada nivel de capital. El capital se hace más productivo en  $t = 1$ ; es decir, con el mismo capital se puede producir más. Por tanto, la demanda de capital aumenta.

**2do Efecto (sobre las empresas):** el aumento de la demanda de capital permite que la tasa de interés en  $t = 1$  se incremente:  $\uparrow r_t(r_0 \rightarrow r_1)$ ,  $r_1 > r_0$ . Esto se debe a que la oferta de capital en  $t = 1$  se mantiene constante ya que no se ve afectada por el choque de productividad.

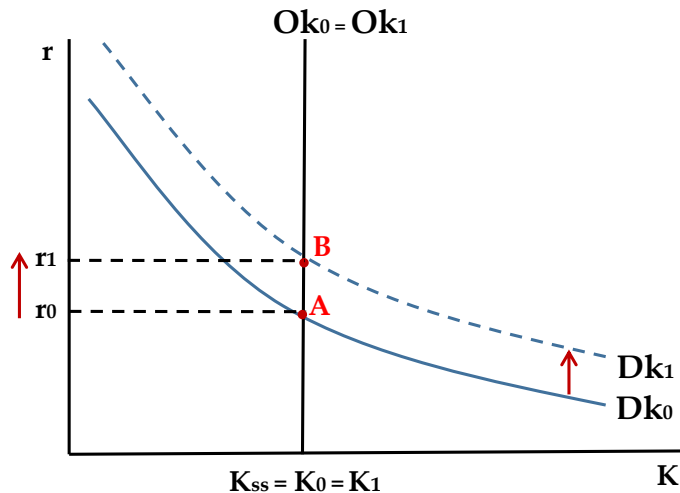
**3er Efecto (sobre las familias):** el incremento de la tasa de interés real produce un efecto ingreso sobre el consumo:

$$\uparrow r_t(r_1 > r_0) \rightarrow r_1 k_1 > r_0 k_0 \rightarrow \uparrow c_1$$

**Figura 3:** Efecto sobre la función de producción



**Figura 4:** Efecto sobre la demanda de capital



**4to Efecto (sobre las familias):** el incremento de la tasa de interés incentiva el ahorro, el cual en economía cerrada es igual a la inversión. Entonces la inversión pasa de  $i_0$  a  $i_1$  ( $i_1 > i_0$ ). El impacto de una mayor inversión se observa en el incremento de la oferta de capital en el siguiente periodo ( $t = 2$ )

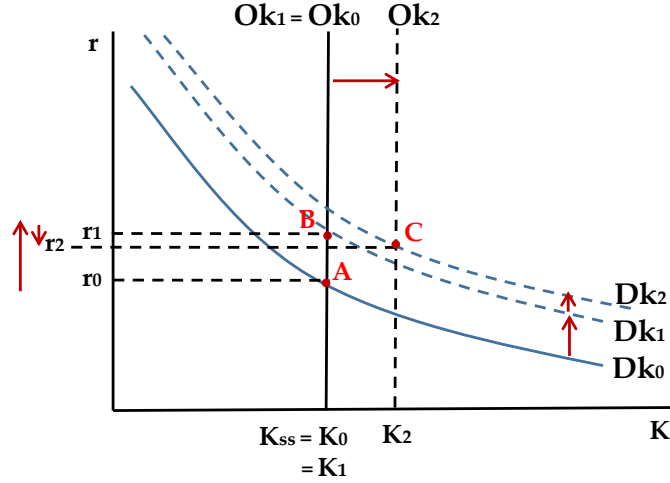
$$k_2 = (1 - \delta)k_1 + i_1$$

Por tanto:

$$i_1 > i_0 \rightarrow k_2 > k_1$$

**5to Efecto (sobre las empresas y las familias):** como el impacto del choque de productividad tiene persistencia; es decir, sus efectos son positivos aunque cada vez menores en el tiempo. En  $t = 2$  la función de producción se incrementa generando que la demanda de capital también se incremente, pero en menor magnitud que lo observado en  $t = 1$ . Esto produce que la tasa de interés real en  $t = 2$  sea menor que en  $t = 1$  ( $r_2 < r_1$ ); sin embargo, sigue siendo mayor que el valor en  $t = 0$ . Entonces dado que el individuo compara su

**Figura 5:** Efecto sobre la oferta y demanda de capital



**Cuadro 9:** Valores de la función impulso-respuesta (variables log-lineales)

| t | $\hat{y}_t$ | $\hat{k}_{t+1}$ | $\hat{c}_t$ | $\hat{i}_t$ | $\hat{R}_t$ | $\hat{a}_t$ |
|---|-------------|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0 | 0           | 0               | 0           | 0           | 0           | 0           |
| 1 | 0.667       | 0.05512         | 0.26429     | 2.20468     | 0.02636     | 1           |
| 2 | 0.652       | 0.10660         | 0.26901     | 2.11441     | 0.02359     | 0.95        |
| 3 | 0.63747     | 0.15464         | 0.27321     | 2.02834     | 0.02098     | 0.9025      |
| 4 | 0.62337     | 0.19943         | 0.27691     | 1.94626     | 0.01852     | 0.85738     |
| . | .           | .               | .           | .           | .           | .           |

**Nota:** Debido a que el choque se realiza en el primer periodo ( $t = 1$ ), el valor de las variables en  $t = 0$  es cero. Cabe mencionar que estos valores se obtienen del código “Campbell\_Lfijo.m (sección 4)”

situación en cada periodo con respecto a  $t = 0$  (estado estacionario), entonces esta mayor tasa de interés ( $r_2 > r_0$ ) produce dos efectos sobre el consumo:

$$r_2 > r_0 : \text{Efecto sustitución} \longrightarrow \downarrow c_1 \quad \uparrow c_2$$

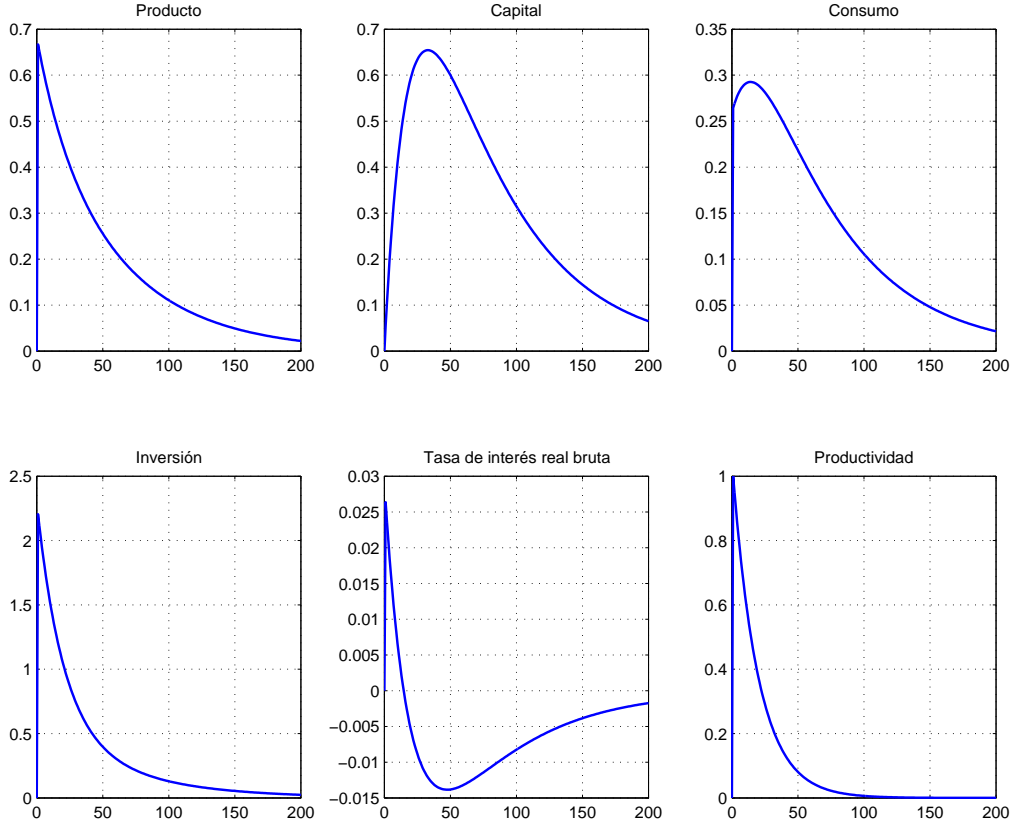
$$r_2 > r_0 : \text{Efecto ingreso} \longrightarrow r_2 k_2 > r_1 k_1 \longrightarrow \uparrow c_2$$

Por tanto el efecto final de la tasa de interés sobre el consumo, para  $\sigma$  pequeño, es:

$$EI > |ES| \longrightarrow \uparrow c_1 \quad \uparrow c_2$$

El cuadro [9] muestra los valores de la función impulso-respuesta de las variables endógenas del modelo. Para leer correctamente estos valores se debe de recordar que estas funciones corresponden a las variables log-lineales, las cuales por ejemplo para el producto está expresada de la siguiente manera:  $\hat{y}_t = \ln(y_t) - \ln(y_{ss})$  o en su forma reducida  $\hat{y}_t = \ln\left[\frac{y_t}{y_{ss}}\right]$ .

**Figura 6:** Función impulso-respuesta de las variables macroeconómicas log-lineales



**Nota:** Estas funciones impulso-respuesta corresponde a las variables log-lineales; es decir a  $\hat{y}_t$ ,  $\hat{k}_t$ ,  $\hat{c}_t$ ,  $\hat{i}_t$ ,  $\hat{r}_t$  y  $\hat{a}_t$ . Cabe mencionar que estos gráficos se obtienen del código “Campbell.Lfijo.m (sección 4).”

En línea con lo anterior, según el cuadro [9] el valor del producto (log-lineal) en  $t = 0$  es igual a cero. Es decir,  $\hat{y}_0 = \ln\left[\frac{y_0}{y_{ss}}\right] = 0$ . La única solución para esta expresión es que  $\frac{y_0}{y_{ss}} = 1$ , lo cual conlleva a que  $y_0 = y_{ss}$ . Esto quiere decir que cuando la variable log-lineal  $\hat{y}_t$  se encuentra en el valor cero, esto significa que la variable en niveles  $y_t$  se encuentra en su estado estacionario.

De otro lado, en  $t = 1$  el valor del producto (log-lineal) es igual a 0.667, en el cual se cumple:  $\hat{y}_1 = 0.667 = \ln\left[\frac{y_1}{y_{ss}}\right]$ . Resolviendo la segunda igualdad se tiene que  $\frac{y_1}{y_{ss}} = e^{0.667} \approx 1 + 0.667$ . Por tanto,  $\frac{y_1}{y_{ss}} = 1 + 0.667$ , lo cual conlleva finalmente a  $y_1 = (1 + 0.667)y_{ss}$ .

$$\text{En } t = 1 \mapsto \underbrace{\hat{y}_1 = 0.667}_{\text{variable log-lineal}} \mapsto \underbrace{y_1 = (1 + 0.667)y_{ss}}_{\text{variable en niveles}}$$

Por tanto, el valor (0.667) de la función impulso respuesta en  $t = 1$  significa que la variable producto en niveles ( $y_1$ ) está 66.7% por encima de su nivel de estado estacionario ( $y_{ss}$ ).

En la figura [6] y el cuadro [9] se puede observar lo siguiente:

1. En  $t = 0$  (antes de choque) todas las variables permanecen en su estado estacionario. Por tanto, las variables log-lineales en  $t = 0$  son iguales a cero ( $\widehat{x}_{ss} = \ln(\frac{x_{ss}}{x_{ss}}) = \ln(1) = 0$ ).
2. En el periodo del choque ( $t = 1$ ),  $\epsilon_1$  toma el valor de su desviación estándar, en este caso igual a 1.
3. El primer efecto del choque de productividad es un incremento en la función de producción, la cual incrementa de productividad marginal del capital  $PMgk_t$ ; es decir, la demanda del capital en “t” ( $D_k$ ).
4. El incremento de la demanda de capital aumenta la tasa de interés de hoy ( $\widehat{R}_t$ ). Esto se debe a que la oferta del capital es perfectamente inelástica (vertical) porque es fijada en el periodo anterior  $\widehat{k}_t$ .
5.  $\uparrow \widehat{R}_t \rightarrow$  produce un Efecto Ingreso (EI):  $\uparrow (\widehat{R}_t \widehat{k}_t)$
6. El efecto ingreso incrementa el  $c_t$  y  $i_t$
7.  $\uparrow i_t$  expande  $k_{t+1}$  (oferta del capital de “t+1”).
8. Lo anterior produce una caída de la tasa de interés en “t+1” ( $\downarrow r_{t+1}$ ), pero aún está por encima de su estado estacionario; es decir, es más alta que la tasa de interés antes del choque  $\widehat{R}_0$ , lo cual incentiva a la familia trasladar consumo de hoy “t” hacia mañana “t + 1”. Es decir, existe un efecto sustitución que es gobernado por la elasticidad de sustitución del consumo. Para poder ver esta relación revisemos la ecuación de Euler log-lineal:

$$\widehat{c}_t = E_t \left[ \widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma} \widehat{R}_{t+1} \right]$$

Aquí se puede observar que si la tasa de interés de  $t+1$  se incrementa en 1% entonces el consumo hoy “t” se reduce en  $\frac{1}{\gamma}$  (elasticidad de sustitución del consumo). Todo ello es el efecto sustitución que produce la tasa de interés.

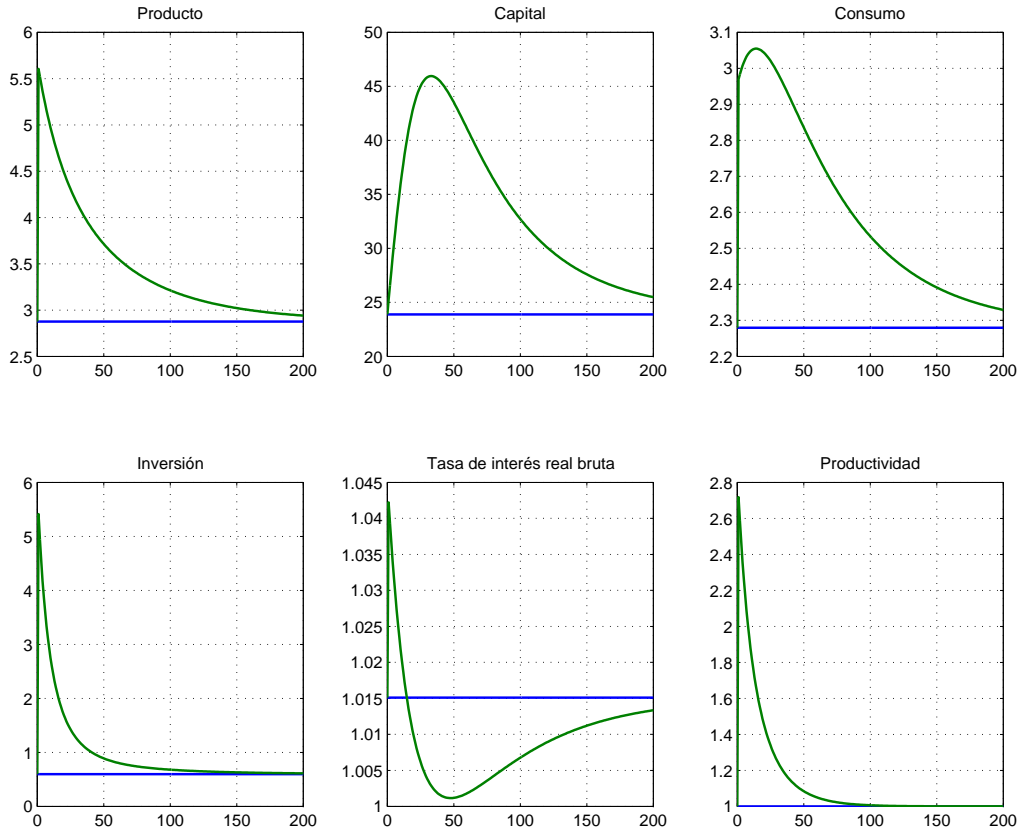
9.  $\downarrow \widehat{R}_{t+1}$  (pero por encima del estado estado estacionario) produce dos efectos: Efecto Sustitución (ES) y Efecto Ingreso (EI).
10. Efecto sustitución (de la tasa de interés):

$$\widehat{R}_{t+1} > \widehat{R}_t \rightarrow \downarrow \widehat{c}_t$$

11. Efecto ingreso (de la tasa de interés):

$$\widehat{R}_{t+1} > \widehat{R}_t \rightarrow \uparrow \widehat{c}_{t+1}$$

De la figura [7] se puede concluir algunas ideas. La primera conclusión es que el capital es más grande en unidades que cualquier otra variable. Por ejemplo, el valor de estado estacionario del capital es de 23.88 unidades, la cual es mayor en gran medida con respecto a las demás variables (el valor de estado estacionario del producto es de 2.87 unidades).

**Figura 7:** Función impulso-respuesta de las variables macroeconómicas en niveles

**Nota:** Estas funciones impulso-respuesta corresponde a las variables en niveles; es decir a  $y_t$ ,  $k_t$ ,  $c_t$ ,  $i_t$ ,  $R_t$  y  $a_t$ . Cabe mencionar que esta gráfica se obtienen del código “Campbell\_Lfijo.m” (sección 5).

Para entender por qué el stock de capital en estado estacionario es grande se debe de revisar los parámetros de los cuales depende:

$$k_{ss} = \left[ \frac{\frac{1}{\beta} - (1 - \delta)}{1 - \alpha} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Aplicando el signo del exponente se tiene:

$$k_{ss} = \left[ \frac{1 - \alpha}{\frac{1}{\beta} - (1 - \delta)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Entonces  $k_{ss}$  es una función de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$ . En primer lugar, el exponente  $\frac{1}{\alpha}$  es mayor a uno porque  $\alpha$  es menor a uno ( $= 0.667$ ), mientras más pequeño sea  $\alpha$  más grande será el exponente y mayor será el numerador incrementando el  $k_{ss}$ . En segundo lugar, un incremento de la tasa de depreciación reduce  $k_{ss}$ , lo cual hace sentido debido a que el capital se consume a una mayor depreciación. Por ejemplo, si el capital se deprecia totalmente ( $\delta = 1$ ), entonces  $k_{ss} = 0.1880$ . Finalmente, una mayor tasa de descuento incrementa  $k_{ss}$ .



La segunda conclusión es que la inversión es muy pequeña en comparación con el capital. Esto se debe a que en estado estacionario la inversión  $i_{ss}$  es igual a una proporción del capital  $\delta k_{ss}$ , es más  $\delta$  es igual a 2.5%; es decir, la inversión en estado estacionario (= 0.597) es igual al 2.5 % del capital. Una tercera conclusión es que dado que los valores de la función impulso-respuesta de las variables log-lineales cumplen con la siguiente expresión:

$$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \widehat{i}_t$$

Entonces se puede obtener una relación entre los niveles de las variables (en la función impulso-respuesta de las variables en niveles):

$$\begin{aligned} \widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \widehat{i}_t \\ \ln\left(\frac{y_t}{y_{ss}}\right) &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \ln\left(\frac{c_t}{c_{ss}}\right) + \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \ln\left(\frac{i_t}{i_{ss}}\right) \\ \ln(y_t) &= \left(\ln(y_t) - \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \ln(c_{ss}) - \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \ln(i_{ss})\right) + \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \ln(c_t) + \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \ln(i_t) \quad (107) \end{aligned}$$

De la figura [8] (gráfica de la derecha) se desprende una conclusión importante: ante un choque de productividad, la inversión reacciona fuertemente superando al producto y al consumo. Es más, la inversión se incrementa un poco más del 200 % del valor de su estado estacionario. Además, las variables demoran más de 100 periodos (trimestres) en volver a su estado estacionario debido a que el choque tiene una alta persistencia ( $\phi = 0.95$ ).

## 9. Simulación de las variables endógenas

Para la simulación del capital usaremos su representación autorregresiva AR(2):

$$\widehat{k}_{t+1} = \phi_1 \widehat{k}_t + \phi_2 \widehat{k}_{t-1} + \eta_{ka} \epsilon_t$$

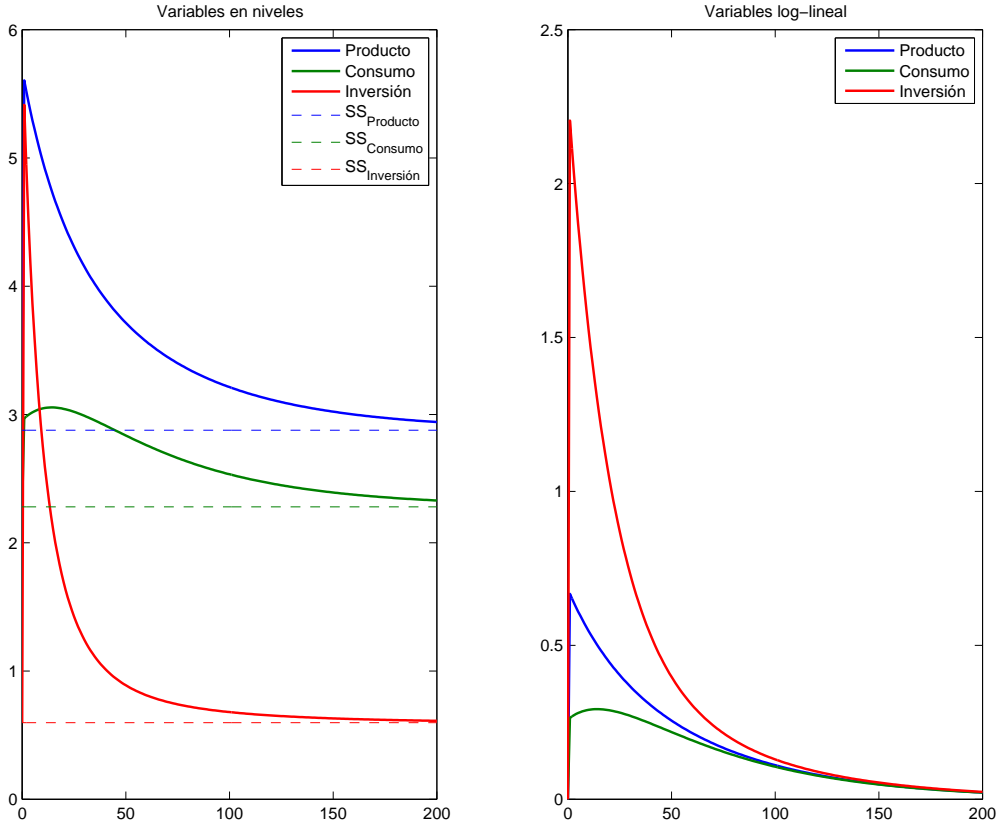
Asumiremos que la variable inicia de su estado estacionario:  $\widehat{k}_0 = 0$ . Además, se asume que la variable en periodos previos se ha mantenido en *steady state*, entonces:  $\widehat{k}_{-1} = 0$ .

**Cuadro 10:** Simulación del capital log-lineal

| t | $\epsilon_t$                    | Representación AR(2) del $k_{t+1}$  |
|---|---------------------------------|---|
| 0 | $\epsilon_0 = 0$ (steady state) | $\widehat{k}_1 = \phi_1 \widehat{k}_0 + \phi_2 \widehat{k}_{-1} + \eta_{ka} \epsilon_0$ |
| 1 | $\epsilon_1 =$ valor aleatorio  | $\widehat{k}_2 = \phi_1 \widehat{k}_1 + \phi_2 \widehat{k}_0 + \eta_{ka} \epsilon_1$    |
| 2 | $\epsilon_2 =$ valor aleatorio  | $\widehat{k}_3 = \phi_1 \widehat{k}_2 + \phi_2 \widehat{k}_1 + \eta_{ka} \epsilon_2$    |
| 3 | $\epsilon_3 =$ valor aleatorio  | $\widehat{k}_4 = \phi_1 \widehat{k}_3 + \phi_2 \widehat{k}_2 + \eta_{ka} \epsilon_3$    |
| 4 | $\epsilon_4 =$ valor aleatorio  | $\widehat{k}_5 = \phi_1 \widehat{k}_4 + \phi_2 \widehat{k}_3 + \eta_{ka} \epsilon_4$    |

Para la simulación de las variables macroeconómicas como el producto, consumo e inversión, primero se necesita la serie simulada de la productividad  $\widehat{a}_t$  y del capital  $\widehat{k}_t$ , las cuales se muestran en el cuadro 11. Para esto último se utiliza la solución del sistema de ecuaciones log-lineal:

**Figura 8:** Función impulso-respuesta (comparación de las variables log-lineal vs en niveles)



**Nota:** Cabe mencionar que esta gráfica se obtiene del código “Campbell\_Lfijo.m (sección 5)”.

$$\begin{aligned}\hat{a}_t &= \phi\hat{a}_{t-1} + \epsilon \\ \hat{k}_{t+1} &= \phi_1\hat{k}_t + \phi_2\hat{k}_{t-1} + \eta_{ka}\epsilon_t\end{aligned}$$

Para la simulación de las demás variables macroeconómicas ( $\hat{y}_t$ ,  $\hat{c}_t$ ,  $\hat{i}_t$  y  $\hat{R}_t$ ) se utiliza la solución:

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= \alpha\hat{a}_t + (1 - \alpha)\hat{k}_t \\ \hat{c}_t &= \eta_{ck}\hat{k}_t + \eta_{ca}\hat{a}_t \\ \hat{i}_t &= \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(1 - \alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})\hat{k}_t + \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})\hat{a}_t \\ \hat{R}_t &= \lambda_3(\hat{a}_t - \hat{k}_t)\end{aligned}$$

Donde:  $\eta_{ik} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(1 - \alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})$  y  $\eta_{ia} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})$

La simulación de las variables de los ciclos económicos pueden tomar valores negativos debido a que se encuentran expresadas en log-desviaciones de su estado estacionario ( $\ln(\frac{x_t}{x_{ss}})$ ). El valor negativo

**Cuadro 11:** Simulación de la productividad y del capital (log-lineal)

| t | $\epsilon_t$   | $\hat{a}_t$           | $\hat{k}_{t+1}$       |
|---|--|-----------------------|-----------------------|
| 0 | $\epsilon_0 = 0$                                     | $\hat{a}_0 = 0$       | $\hat{k}_1 = 0$       |
| 0 | $\epsilon_1 = \text{valor aleatorio de una } N(0,1)$ | $\hat{a}_1 = 0.1832$  | $\hat{k}_2 = 0.0101$  |
| 0 | $\epsilon_2 = \text{valor aleatorio de una } N(0,1)$ | $\hat{a}_2 = -0.8557$ | $\hat{k}_3 = -0.0372$ |
| 0 | $\epsilon_3 = \text{valor aleatorio de una } N(0,1)$ | $\hat{a}_3 = 0.1363$  | $\hat{k}_4 = -0.0291$ |
| 0 | $\epsilon_4 = \text{valor aleatorio de una } N(0,1)$ | $\hat{a}_4 = 0.4366$  | $\hat{k}_5 = -0.0046$ |
| . | .  | .                     | .                     |
| . | .  | .                     | .                     |

**Cuadro 12:** Simulación de las variables macroeconómicas log-lineales

| t | $\hat{y}_t$                           | $\hat{c}_t$                           | $\hat{i}_t$                           | $\hat{R}_t$                  |
|---|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| 0 | $y_0 = \alpha a_0 + (1 - \alpha k_0)$ | $c_0 = \eta_{ck} k_0 + \eta_{ca} a_0$ | $i_0 = \eta_{ik} k_0 + \eta_{ia} a_0$ | $R_0 = \lambda_3(a_0 - k_0)$ |
| 1 | $y_1 = \alpha a_1 + (1 - \alpha k_1)$ | $c_1 = \eta_{ck} k_1 + \eta_{ca} a_1$ | $i_1 = \eta_{ik} k_1 + \eta_{ia} a_1$ | $R_1 = \lambda_3(a_1 - k_1)$ |
| 2 | $y_2 = \alpha a_2 + (1 - \alpha k_2)$ | $c_2 = \eta_{ck} k_2 + \eta_{ca} a_2$ | $i_2 = \eta_{ik} k_2 + \eta_{ia} a_2$ | $R_2 = \lambda_3(a_2 - k_2)$ |
| 3 | $y_3 = \alpha a_3 + (1 - \alpha k_3)$ | $c_3 = \eta_{ck} k_3 + \eta_{ca} a_3$ | $i_3 = \eta_{ik} k_3 + \eta_{ia} a_3$ | $R_3 = \lambda_3(a_3 - k_3)$ |
| 4 | $y_4 = \alpha a_4 + (1 - \alpha k_4)$ | $c_4 = \eta_{ck} k_4 + \eta_{ca} a_4$ | $i_4 = \eta_{ik} k_4 + \eta_{ia} a_4$ | $R_4 = \lambda_3(a_4 - k_4)$ |
| . | .                                     | .                                     | .                                     | .                            |
| . | .                                     | .                                     | .                                     | .                            |

de la variable log-lineal significa que la variable en niveles se encuentra por debajo de su estado estacionario. Además, era de esperar que la variable simulada log-lineal tenga valores negativos porque su media es igual a cero. Sin embargo, la variable simulada en niveles tiene solo valores positivos.

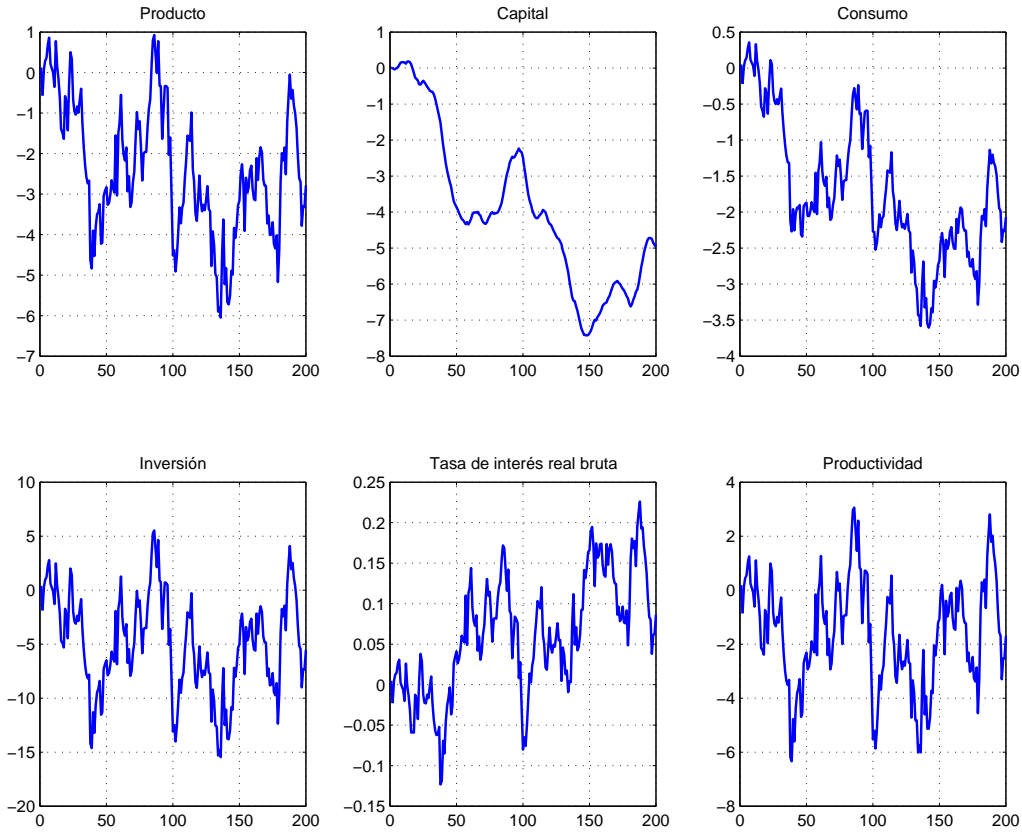
## 10. Componente cíclico de las variables simuladas

Para hallar el componente cíclico de las variables log-lineales se aplica el filtro Hodrick-Prescott (Filtro HP). Este filtro permite separar la serie en dos componentes: el componente tendencial y el componente cíclico. La figura [10] muestra el componente cíclico y tendencial para cada variable simulada.

Lo que nos interesa evaluar del modelo son los momentos del **componente cíclico** de cada variable simulada. Es decir, la varianza, la autocorrelación y la correlación con otras variables.

## 11. Cálculo de los momentos teóricos

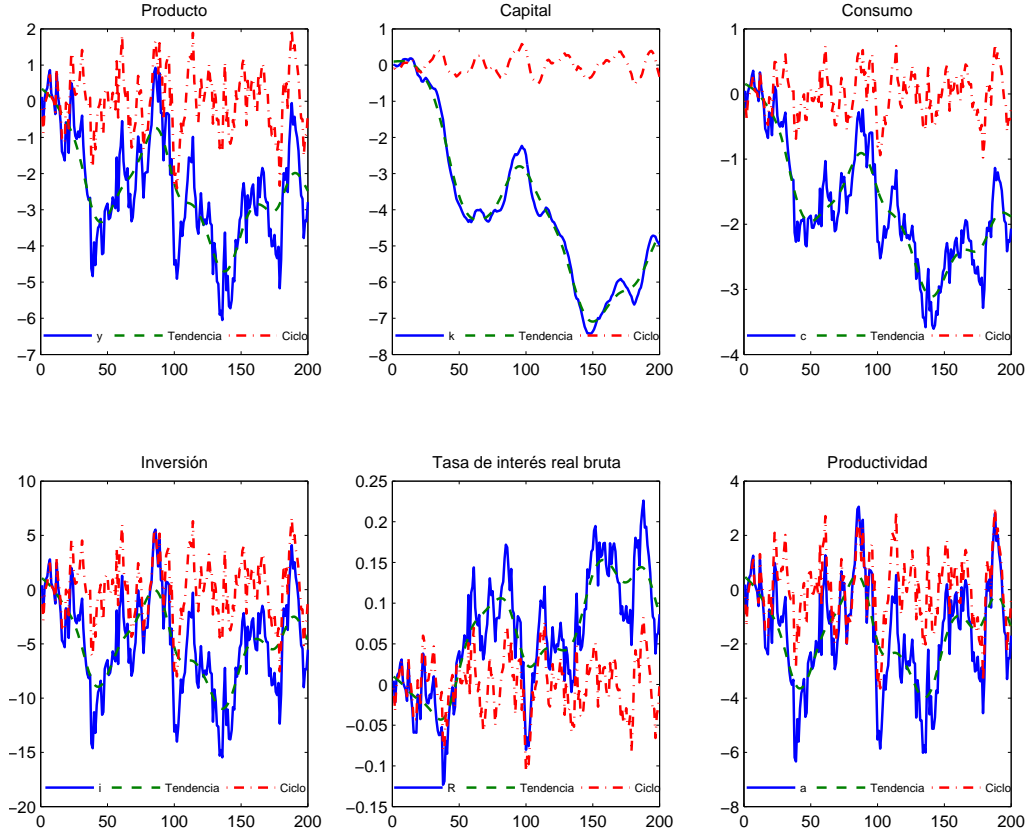
Al realizar la simulación del modelo en Matlab, lo que se obtiene son los momentos teóricos para las variables log-lineales. Sin embargo, lo que se necesita es volver a las variables en niveles debido a que los momentos empíricos corresponden a las variables en niveles'. Para calcular los momentos teóricos de las variables en niveles se utiliza la relación entre la variable log-lineal y la variable en niveles:

**Figura 9:** Simulación de las variables macroeconómicas log-lineales

**Nota:** El capital se comporta como AR(2), mientras que el producto, el consumo, la inversión y la tasa de interés real se comportan como ARMA(2,1). Además, la productividad sigue un proceso AR(1). Este gráfico se obtiene del código “Campbell\_Lfijo.m” (sección 6).

$$\hat{x}_t = \ln\left(\frac{x_t}{x_{ss}}\right) \quad (108)$$

**Media:** la media de la variable log-lineal es cero. Luego de los artificios algebraicos se concluye la relación (109), la cual indica que la media del logaritmo de la variable “x” es igual al logaritmo de la variable en estado estacionario.

**Figura 10:** Aplicación del filtro HP a las variables simuladas

**Nota:** Debido a que los parámetros calibrados corresponden a datos trimestrales, entonces cada periodo en esta figura se entiende como un trimestre. Esto sugiere que se debe de usar el parámetro de suavizamiento del filtro HP correspondiente a datos trimestrales ( $\lambda = 1600$ ). Este gráfico se obtiene del código “Campbell\_Lfijo.m” (sección 7).

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_t &= \ln\left(\frac{x_t}{x_{ss}}\right) \\
 E\hat{x}_t &= E\ln\left(\frac{x_t}{x_{ss}}\right) \\
 \mu_{\hat{x}_t} &= E(\ln(x_t) - \ln(x_{ss})) \\
 \mu_{\hat{x}_t} &= E(\ln(x_t)) - \ln(x_{ss}) \\
 \mu_{\hat{x}_t} &= \mu_{\ln(x_t)} - \ln(x_{ss}) \\
 0 &= \mu_{\ln(x_t)} - \ln(x_{ss}) \\
 \mu_{\ln(x_t)} &= \ln(x_{ss})
 \end{aligned} \tag{109}$$

**Varianza:** la varianza de la variable log-lineal es igual a la varianza del logaritmo de la variable en niveles (ver la ecuación (110)). Por su defecto la desviación estándar de ambas

variables es la misma.

$$\begin{aligned}
Var(\hat{x}_t) &= Var\left(\ln\left(\frac{x_t}{x_{ss}}\right)\right) \\
\text{Por propiedad} &: Var(ax + b) = a^2Var(x) \\
Var(\hat{x}_t) &= Var(\ln(x_t) - \ln(x_{ss})) \\
Var(\hat{x}_t) &= Var(\ln(x_t)) \\
\sigma_{\hat{x}_t}^2 &= \sigma_{\ln(x_t)}^2
\end{aligned} \tag{110}$$

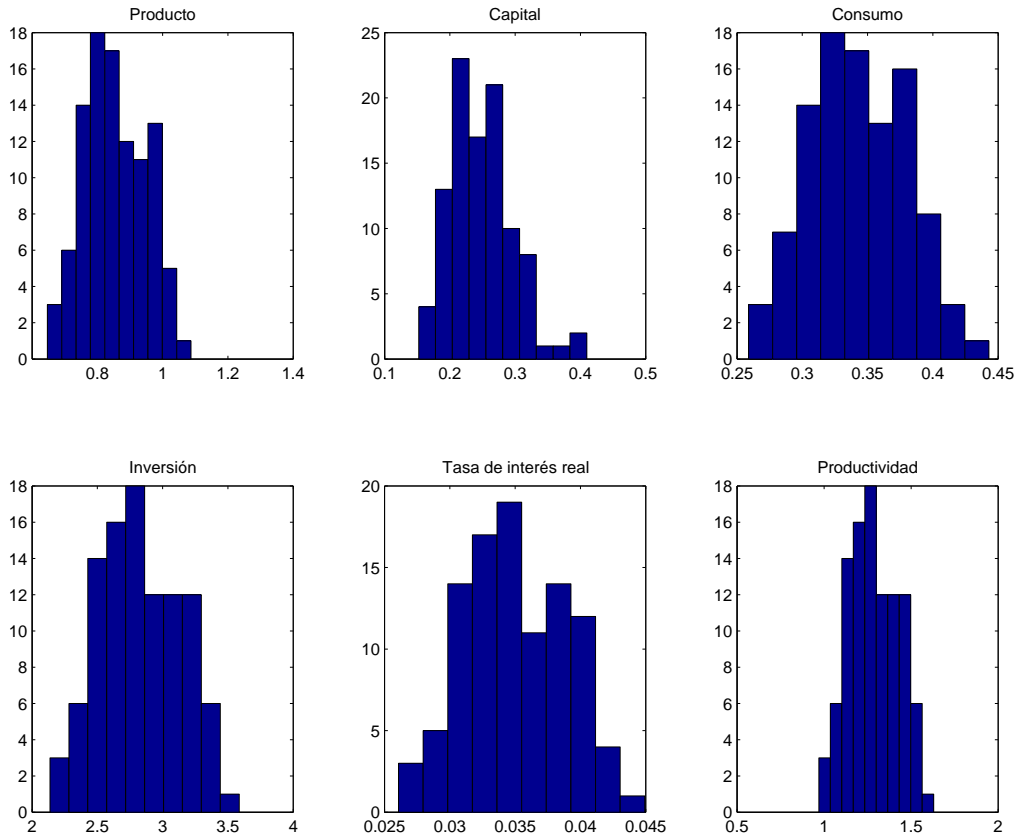
**Correlación:** la correlación entre dos variables log-lineales es igual a la correlación entre el logaritmo de dichas variables en niveles.

$$\begin{aligned}
corr(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - \mu_{\hat{x}_i})(\hat{y}_i - \mu_{\hat{y}_i})}{\sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{y}}} \\
\text{Pero} &: \mu_{\hat{x}_i} = 0 \text{ y } \mu_{\hat{y}_i} = 0 \\
corr(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}_i)(\hat{y}_i)}{\sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{y}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N (\ln \frac{x_i}{x_{ss}})(\ln \frac{y_i}{y_{ss}})}{\sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{y}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N (\ln(x_i) - \ln x_{ss})(\ln(y_i) - \ln y_{ss})}{\sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{y}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N (\ln(x_i) - \mu_{\ln(x_t)})(\ln(y_i) - \mu_{\ln(y_t)})}{\sigma_{\ln(x_t)}\sigma_{\ln(y_t)}} \\
corr(\hat{x}, \hat{y}) &= corr(\ln(x_t), \ln(y_t))
\end{aligned} \tag{111}$$

De lo anterior se concluye que los segundos momentos de las variables log-lineales son exactamente iguales a los segundos momentos del logaritmo natural de las variables en niveles. Por tanto, podemos concluir que los segundos momentos del componente cíclico de las variables log-lineales (simuladas) son idénticas a los segundos momentos del componente cíclico del logaritmo de las variables en niveles. Entonces, basta comparar los momentos (del componente cíclico) obtenidos por el modelo (simulación) con los correspondientes obtenidos de los datos (variables en logaritmos).

Para realizar la comparación se hace lo siguiente. En primer lugar se fija el periodo de estudio de las variables macroeconómicas (por ejemplo: 1980.I hasta 2016.III). Este periodo esta compuesto por 147 trimestres. En segundo lugar se realizará 500 simulaciones considerando que cada variable tenga un periodo de 147 trimestres. En tercer lugar, para cada simulación se aplica el filtro HP y se abstrae el componente cíclico. En cuarto lugar, se calcula la media, varianza, autocorrelación de primer orden y correlación del componente cíclico para cada simulación. En quinto lugar, se construye una distribución para la media, la varianza, autocorrelación de primer orden y la correlación. Se elige el valor medio de cada distribución, y ese valor representa el valor de cada segundo momento teórico. Finalmente, dichos valores se comparan con los datos.

**Figura 11:** Distribuciones de la desviación estándar del modelo teórico



**Nota:** Estas distribuciones se obtiene de simular 100 veces las variables considerando un periodo de 150 trimestres. El valor que se toma de cada distribución es el valor promedio. Este gráfico se obtiene del código “Campbell.Lfijo\_Sim\_Variables.m” (sección 7).

## 12. Comparación modelo teórico con los datos empiricos

Del cuadro [13] se desprende algunas conclusiones. La primera es que los datos sugieren que la volatilidad de la inversión es mayor que el producto y el consumo, tal es así que la desviación estándar de la inversión es 4.8 veces la volatilidad del producto y 6.4 veces la del consumo. Sin embargo, el modelo teórico no captura todas estas relaciones encontrada en los datos. En primer lugar, aunque mantiene que la volatilidad de la inversión es mayor que la del consumo, sobreestima la magnitud (la volatilidad de la inversión es 8.2 veces la del consumo). En segundo lugar, la volatilidad para las tres variables (producto, consumo e inversión) está muy por debajo de lo observado en los datos. De otro lado, una bondad del modelo es que captura la dirección correcta en cuanto a volatilidad ( $\gamma$ ):  $\gamma_{inversión} > \gamma_{producto} > \gamma_{consumo}$ .

Una segunda conclusión es que la correlación temporal del producto con el consumo y la inversión está sobrevaluada por el modelo. No obstante, el modelo se acerca mucho más a la correlación producto-inversión que la correpondiente con el consumo.

**Cuadro 13:** Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

| Variable  | Datos empíricos USA |                        | Modelo teórico   |                        |
|-----------|---------------------|------------------------|------------------|------------------------|
|           | DesEst (%)          | Corr. con producto (t) | DesEst (%)       | Corr. con producto (t) |
| Producto  | 1.72                | 1                      | 0.85<br>(0.093)  | 1                      |
| Consumo   | 1.27                | 0.83                   | 0.34<br>(0.0382) | 0.9874                 |
| Inversión | 8.24                | 0.91                   | 2.82<br>(0.3065) | 0.9972                 |

**Nota:** Los valores empíricos han sido tomados de Cooley y Prescott (1995), los cuales han sido calculados bajo el periodo muestral de 1954.I hasta 1991.III. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una simulación de 100 veces considerando un periodo de 150 trimestres. Los valores mostrados en el modelo teórico son los valores promedios de cada distribución. Estos valores se obtienen del código “Campbell\_Lfijo\_Sim\_Variables.m” (sección 8).

### 13. Códigos

La solución del modelo como las funciones impulso-respuesta y la simulación de las variables se ha desarrollado directamente en Matlab (mediante la construcción de varios m-file) y también por medio de Dynare (mediante la construcción de un mod-file). El resultado de ambos caminos es el mismo, la ventaja de construir directamente un m-file es que se puede hacer explícito muchos detalles en la solución y simulación del modelo, los cuales ya están programados en Dynare.



**Cuadro 14:** Códigos en Matlab y Dynare

| Códigos                                | Descripción   |
|--|---|
| Matlab                                 |   |
| Campbell_Lfijo.m                       | Este m-file calcula el estado estacionario, calcula los coeficientes de la solución derivados del método de coeficientes indeterminados. Además, calcula la función impulso-respuesta y realiza una simulación de las variables. Finalmente, aplica el filtro HP para obtener la tendencia y el ciclo de cada variable simulada |
| Campbell_Lfijo_Sim_Parametros.m        | Este m-file simula los valores de las elasticidades (coeficientes de la solución) en función de la persistencia ( $\phi$ ) y de la ESI del consumo ( $\sigma$ ).  |
| Campbell_Lfijo_Sim_Variables.m         | Este m-file simula 100 veces las variables (forma ARMA(p,q)) para 150 periodos. Cabe mencionar que ambos parámetros pueden ser cambiados por el usuario para realizar distintas simulaciones.   |
| Dynare                                 |   |
| Campbell_Lfijo_Dynare_nolineal_log.mod | Este archivo mod contiene el modelo no-lineal con variables en logaritmo. Este archivo es el que usa Dynare para resolver el modelo.  |
| Campbell_Lfijo_Dynare_lineal_log.mod   | Este archivo mod contiene el modelo lineal con variables en logaritmo. Este archivo es el que usa Dynare para resolver el modelo. Cabe mencionar que ambos archivos mod brindan el mismo resultado en cuanto a las funciones de política y de estado.   |