Clase 2: Modelo de Long y Plosser (1983)

Macrodinámica I

Hamilton Galindo

Junio - Agosto
2015

Contenido

Supuestos del modelo

1. Este modelo esta basado en Long y Plosser (1983) y tiene solución analítica en el caso de depreciación total y utilidad logaritmica.
2. Dos agentes económicos: familias y empresas.
3. Las familias son dueñas del capital.
4. Economía cerrada, lo cual implica que el ahorro sea igual a la inversión.
5. Competencia perfecta en el mercado de bienes y de factores.
6. La única fuente de incertidumbre proviene por el lado de la oferta (choques de productividad).

Función de utilidad I

King et. al. (1988) imponen dos restricciones sobre las preferencias (función de utilidad) que permite que el estado estacionario sea compatible con un equilibrio competitivo óptimo:

- La elasticidad de sustitución intertemporal del consumo debe ser invariante a la escala del consumo.
- El efecto ingreso y sustitución asocidas con el crecimiento en la productividad laboral no debe alterar la oferta de trabajo.

La función de utilidad que cumplen las dos restricciones es:

$$u(c,l) = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\sigma} c^{1-\sigma}\right] v(l), & \text{si } \sigma > 0 \text{ y } \neq 1; \\ ln(c) + v(l), & \text{si } \sigma = 1; \end{cases}$$

Donde c es consumo y l es ocio.

Función de utilidad II

Según King et. al. (1988), un caso particular de la función de utilidad es cuando $v(l) = \theta ln(l)$:

$$u(c, l) = ln(c) + \theta ln(l) \tag{1}$$

Modelos y programas I

		Depreciación (δ)	
		Parcial ($\delta < 1$)	Total ($\delta = 1$)
Inversa de la elasticidad de Frisch (γ_n)	$\gamma_n \neq 1$	**Modelo 4** modelo4_LongPlosser.mod Simulacion_modelo4_LongPlosser.m	**Modelo 3** modelo3_LongPlosser.mod Simulacion_modelo3_LongPlosser.m
	$\gamma_n = 1$		**Modelo 1** (Long y Plosser, 1983) modelo1_LongPlosser.mod Simulacion_modelo1_LongPlosser.m

Los modelos

1. El modelo de Long y Plosser (1983), el cual tiene **solución analítica**, es el modelo 1: depreciación total ($\delta = 1$) y utilidad logaritmica en el ocio y el consumo ($\gamma_n = 1$).
2. El modelo 2, 3 y 4 son generalizaciones del modelo de Long y Plosser (1983). Estas no poseen solución analítica debido a las no linealidades.

Modelos y programas II

Los programas

1. Los archivos con extensión "**mod**" son archivos de Dynare y contienen el modelo: ecuaciones, valores de los parámetros, estado estacionario, etc.
2. Los archivos con extensión "**m**" son programas de matlab. Estos levantan los archivos "mod" y calculan las funciones impulso respuesta (choque de productividad). Compara los IRFs ante diferentes valores de los parámetros (*delta*, γ_n y ρ).
3. Las funciones de politica y de estado están guardadas en: "IRF_Long_Plosser_1983.xlsx"

Modelo 4 I

Familias: problema de optimización

Este modelo es el más general: $\delta \in [0, 1]$ y $\gamma_n \neq 1$

1. Las familias demandan bienes de consumo (c_t) y horas de ocio (l_t) [ofrecen horas de trabajo (h_t)]. Estas preferencias se reflejan en la siguiente función de utilidad:

$$u(c_t, h_t) = ln(c_t) + \theta \frac{(1 - h_t)^{1-\gamma_n}}{1 - \gamma_n}$$

   Donde θ representa la valoración que le da el consumidor al ocio en su función de utilidad, y γ_n representa la inversa de la elasticidad de sustitución del trabajo.

2. La dotación de horas totales que dispone la familia se normaliza a uno, de tal forma que:

$$l_t + h_t = 1$$

   Donde h_t son horas de trabajo

Modelo 4 II
Familias: problema de optimización

3. Dado que las familias tienen expectativas racionales y son optimizadoras, entonces estas maximizan su función de utilidad esperada descontada representada por:

$$\underset{\{c_t, h_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ln(c_t) + \theta \frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \right] \tag{2}$$

Las familias deben de elegir la senda temporal óptima de c_t, h_t y k_{t+1}

4. La restricción presupuestaria de la familia es:

$$c_t + i_t = w_t h_t + R_t k_t \tag{3}$$

Donde:

- i_t es la inversión, la cual le sirve para alquilar bienes de capital a las empresas.
- w_t representa el salario real.

Modelo 4 III

Familias: problema de optimización

- R_t es la tasa de alquiler del capital que pagan las firmas.

5. Se supone que las familias son dueñas de los bienes de capital en la economía, por lo cual deben de invertir (i_t) para ofrecer capital en "t+1". La ecuación de movimiento del capital es:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{4}$$

6. El problema de optimización de la familia se resume en la ecuación [2] sujeto a [3] y [4].

Problema de optimización de las familias

$$\underset{\{c_t,h_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ln(c_t) + \theta \frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \right]$$
$$c_t + i_t = w_t h_t + R_t k_t$$
$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Modelo 4 I
Familias: lagrangiano y CPO

1. Luego de despejar la i_t de la ecuación de movimiento del capital e introducirlo en la restricción presupuestaria, se define el lagrangeano:

$$\mathcal{L} = E_t\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t, h_t) + \lambda_t(w_t h_t + R_t k_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)\right]\right\}$$

2. Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{c_t} + \lambda_t(-1) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow \frac{-\theta}{1-h_t} + \lambda_t(w_t) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \Longrightarrow E_t\left[\lambda_t(-1) + \beta\lambda_{t+1}(R_{t+1} + (1-\delta))\right] = 0 \tag{7}$$

Modelo 4 II
Familias: lagrangiano y CPO

3. **Condición Intratemporal**: es la oferta de trabajo, la cual se obtiene de la ecuación (5) y (6):

$$\theta(1 - h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t} \tag{8}$$

4. **Condición Intertemporal:** es la ecuación de euler, la cual indica la senda óptima del consumo. Esta se obtiene de (5) y (7):

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [R_{t+1} + (1 - \delta)] \right]$$

Modelo 4

Familias: elasticidad Frisch de la Oferta de Trabajo (EFOT)

Elasticidad Frisch de la Oferta de Trabajo (EFOT)

- ¿Qué es?
  Es el cambio porcentual en la oferta de trabajo ante un cambio porcentual en el salario real manteniendo la utilidad marginal del consumo constante.
- ¿Qué mide?
  La EFOT mide el *efecto sustitución* que un cambio en el salario real genera en la oferta laboral. Es decir no considera el *efecto ingreso* que se deriva de la sustitución intratemporal entre el consumo/ocio.

Modelo 4 I
Familias: elasticidad Frisch de la Oferta de Trabajo (EFOT)

Cálculo de la EFOT

- [Paso 1:] se calcula la diferenciación total de la oferta de trabajo (8) del cual se obtiene la siguiente expresión:

$$e_t^{hw} = \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{1-h_t}{h_t}\right][1 - e_t^{cw}]$$

  Donde, e_t^{hw} representa la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real; de otro lado, e_t^{cw} es la elasticidad del consumo con respecto al salario real.

- [Paso 2:] según la definición del la “Elasticidad de Frisch”, la utilidad marginal del consumo se mantiene constante, lo cual indica un nivel de consumo fijo invariante ante cambios en el salario real, por lo cual la e_t^{cw} seria igual a cero.

Modelo 4 II
Familias: elasticidad Frisch de la Oferta de Trabajo (EFOT)

- [Paso 3:] finalmente la EFOT es

$$e_t^{hw} = \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{1-h_t}{h_t}\right]$$

Por tanto, la EFOT (e_t^{hw}) depende de manera inversa del γ_n. Por esa razón se considera que γ_n es la inversa de la elasticidad de Frisch (EFOT).

En el modelo RBC, una mayor elasticidad de Frisch (menor γ_n) amplifica más el choque de productividad. Es decir, la oferta de trabajo más elastica incrementa más el trabajo y por ende el producto en t.

Modelo 4 I

Familiad: elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo

1. **Tasa Marginal de Sustitución:** indica la cantidad del bien 1 que se esta dispuesto a ceder si se incrementa en una unidad el bien 2 manteniendo constante el nivel de utilidad.

$$TMgS_{1,2} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -\frac{UMg_2}{UMg_1}$$

2. **Elasticidad de Sustitución:** mide la facilidad de sustituir un bien con respecto a otro; además, mide la curvatatura de la curva de indiferencia y por tanto la sutituibilidad entre bienes.

$$ES_{1,2} = \frac{\partial ln(x_1/x_2)}{\partial ln(TMgS_{1,2})}$$

Modelo 4 II
Familiad: elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo

3. La elasticidad de sustitución se realiza en dos dimensiones:

Intratemporal (c_t, l_t)	Intertemporal (c_t, c_{t+1})
$TMgSI_{c_t,l_t} = -\frac{UMg_l}{UMg_c}$	$TMgSI^c_{t+1,t} = -E_t\left[\frac{UMg_{c_t}}{\beta UMg_{c_{t+1}}}\right]$
$ESI_{c_t,l_t} = \frac{\partial ln(c_1/l_t)}{\partial ln(TMgSI_{c_t,l_t})}$	$ESI^c_{t+1,t} = \frac{\partial ln(c_{t+1}/c_t)}{\partial ln(TMgSI^c_{t+1,t})}$

Modelo 4 III

Familiad: elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo

4. Aplicando el caso intertemporal para la oferta de trabajo:

Elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo (h_t, h_{t+1})

1. $TMgSI_{t+1,t}^{h} = -E_t\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{1-h_t}{1-h_{t+1}}\right)^{-\gamma_n}\right]$
2. $ESI_{t+1,t}^{h} = -\frac{1}{\gamma_n}E_t\left[\frac{1-h_{t+1}}{h_{t+1}}\right]$

Según la expresión de $ESI_{t+1,t}^{h}$, el parámetro γ_n se puede considerar como la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo. En este escenario la elasticidad de Frisch y la $ESI_{t+1,t}^{h}$ son similares.

Modelo 4
Familias: diferentes funciones de utilidad

Asumiendo que l_t es el ocio y h_t es el trabajo, se tiene las siguientes funciones de utilidad:

Funciones de utilidad

- Hansen(1985):
$$u(c_t, l_t) = log(c_t) + Bl_t$$
- GGH(1989):
$$u(c_t, h_t) = \frac{1}{1-\gamma}\left[\left(c_t - \frac{h_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{1-\gamma} - 1\right]$$
- King, Plosser y Rebelo (1988):
$$u(c_t, l_t) = log(c_t) + \theta log(l_t)$$

Cada función de utilidad tiene un nivel diferente de elasticidad de Frisch.

Modelo 4 I
Empresas

1. **Función de Producción:** se asume que existe un solo bien final en la economía y es producido por una función de producción neoclasica $f(k_t, h_t)$ de rendimiento a escala constante.

$$y_t = A_t f(k_t, h_t) = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$$

Por neoclasica entendemos que la función es concava, dos veces continuamente diferenciable, que cumple con las condiciones de Inada y que ambos factores son esenciales en la producción.

- Donde k_t es el stock de capital predeterminado (elegido en el periodo "t-1") y h_t es el insumo trabajo.
- Asimismo, el parámetro α indica la proporción del capital en el producto.
- La variable A_t hace referencia a la productividad; el cual se supone que se comporta de manera estocástica y es expresado por un AR(1).

Modelo 4 II

Empresas

2. **Problema de Optimización**

$$\underset{\{k_t, h_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \quad \pi_t = y_t - [w_t h_t + R_t k_t] \tag{9}$$

sujeto a:

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \tag{10}$$

3. **Condiciones de primer orden**

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial k_t} = 0 \Longrightarrow k_t = \alpha \frac{y_t}{R_t} \quad , [\text{Demanda del capital}] \tag{11}$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow h_t = (1-\alpha) \frac{y_t}{w_t} \quad , [\text{Demanda del trabajo}] \tag{12}$$

Modelo 4
Condiciones de equilibrio y comportamiento del choque exógeno

a. Equilibrio en el mercado de bienes:

$$y_t = c_t + i_t \tag{13}$$

b. El principal mecanismo de impulso en los modelos RBC es por el lado de la oferta. En particular la "productividad", que se comporta como un AR(1):

$$ln(A_t) = \rho_a ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Modelo 4: sistema de ecuaciones principales

Ecuaciones	Descripción
$k_t = \alpha \frac{y_t}{R_t}$	Demanda del capital
$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [R_{t+1} + (1-\delta)] \right]$	Ecuación de Euler
$\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t}$	Oferta de trabajo
$h_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{w_t}$	Demanda de trabajo
$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$	Ley de movimiento del capital
$lnA_t = \phi lnA_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

Modelo 4
Calibración

¿Qué es calibración? En líneas generales, calibrar un modelo es asignar valores a sus parámetros profundos. Estos valores se obtienen de:

- Estudios microeconómicos.
- Cuentas nacionales.
- Estadísticos de la data agregada nacional.
- Otros estudios macro-econométricos.

Para simular el modelo se ha tomado la calibración de King et. al. (1988):

Parámetro	**Observación**
$\alpha = 0.58$	proporción del trabajo en el ingreso nacional
$\gamma_n = 0.8$	inversa de la elasticidad de Frisch (valor para simular)
$\delta = 0.025$	corresponde a una depreciación del 10 % anual
$\theta = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} = 2$	ϵ es el tiempo productivo orientado a actividades no-mercado
$\rho = 0.9$	la productividad es estacionaria, Prescott (1986)
$\beta = 0.988$	corresponde a una tasa de descuento subjetiva de 4 % anual
$\sigma = 0.763$	desviación estándar del choque de productividad, Prescott (1986)
$h_{ss} = 0.2$	el trabajo en estado estacionario

Modelo 4
Estado Estacionario

Algunas notas

1. Se conoce como equilibrio de largo plazo donde $\Delta x_t = 0$ (para todas las variables del modelo) y que el choque de productividad (ε_t) toma su valor promedio ($= 0$)
2. Dada la ecuación de mov. de la productividad, su valor de estado estacionario es $A = 1$
3. Las expectativas desaparecen, por ello se le conoce como solución no estocastica
4. Hallar el estado estacionario es un paso previo a la log-linelización.

Modelo 4
Log-Linealización

Algunas notas matemáticas

1. Definamos x_t como la log-desviación de la variable X_t con respecto a su valor de estado estacionario (X_{ss}):

$$x_t = ln(X_t) - ln(X_{ss})$$

2. De lo anterior se obtiene:

$$X_t = X_{ss} e^{x_t}$$

3. Para pequeñas desviaciones del estado estacionario se cumple que:

$$e^{x_t} \approx 1 + x_t$$

Modelo 4
Aproximación de Taylor: 1er orden

Aproximación de Taylor

Aproximar la función $f(x)$ alrededor de su estado estacionario x_{ss}:

$$f(x) \approx f(x_{ss}) + \frac{f'(x_{ss})}{1!}(x - x_{ss}) + \frac{f''(x_{ss})}{2!}(x - x_{ss})^2 +$$

Considerando una aproximación de 1er orden:

$$f(x) \approx f(x_{ss}) + \frac{f'(x_{ss})}{1!}(x - x_{ss})$$

Si $f(x) = e^x$, entonces (sabiendo que $x_{ss} = 0$, porque $x = X - X_{ss}$):

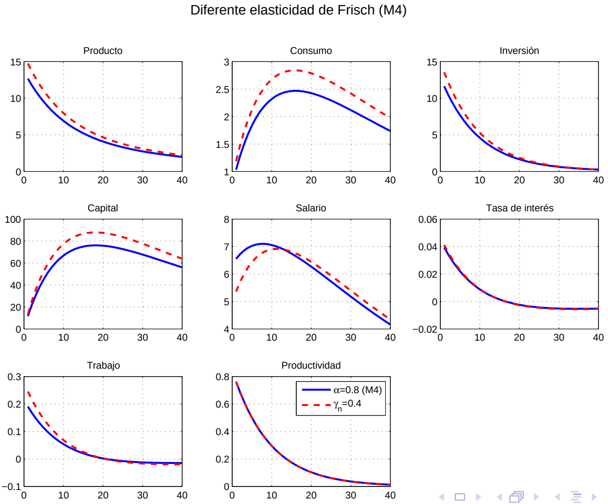
$$\begin{aligned} e^x &\approx e^{x_{ss}} + e^{x_{ss}}(x - x_{ss}) \\ e^x &\approx 1 + (x - x_{ss}) \\ e^x &\approx 1 + x \end{aligned}$$

Modelo 4
Solución del Modelo: método de coeficientes indeterminados

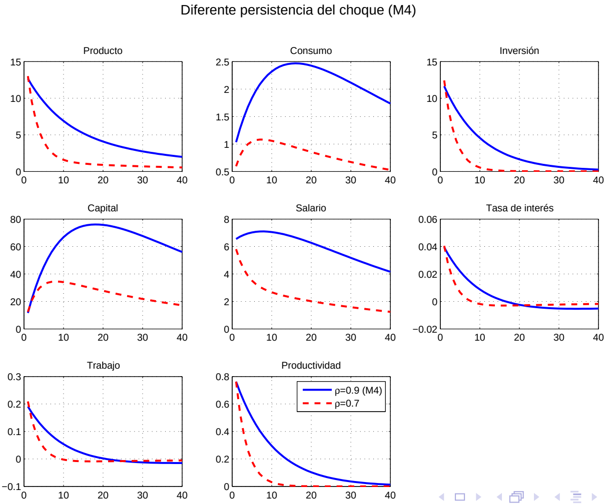
Luego de log-linealizar, se procede a solucionar el modelo por el método de coeficientes indeterminados. Este método consiste en colocar las variables endógenas en función de las variables de estado y del choque.

- $k_{t+1} = \eta_{kk} k_t + \eta_{ka} a_t$
- $y_t = \eta_{yk} k_t + \eta_{ya} a_t$
- $c_t = \eta_{ck} k_t + \eta_{ca} a_t$
- ...

Modelo 4
Función Impulso Respuesta: choque a la productividad



Modelo 4
Función Impulso Respuesta: choque a la productividad

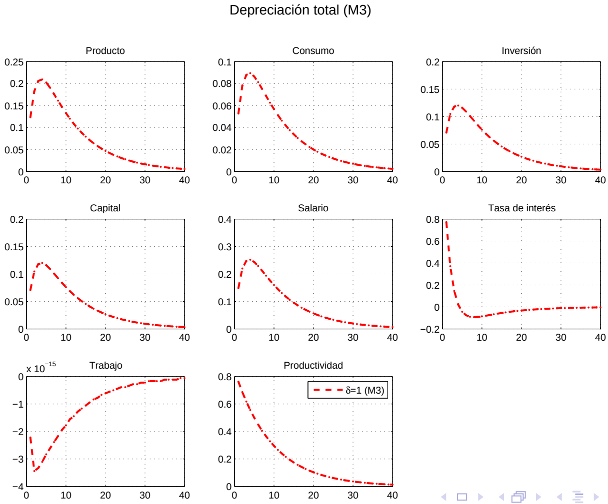


Modelo 3: sistema de ecuaciones principales

El modelo 3 considera $\gamma_n \neq 1$ y $\delta = 1$. Por tanto las ecuaciones principales se mantienen iguales al modelo 4, excepto la ecuación de Euler y la ecuación del movimiento del capital, en las cuales se ha reemplazado $\delta = 1$.

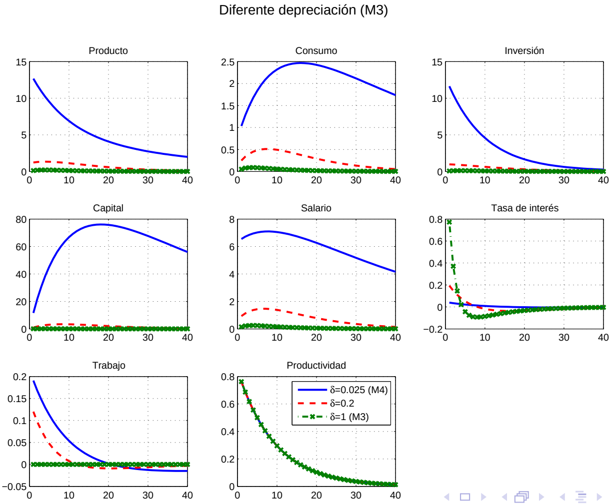
Ecuaciones	Descripción
$k_t = \alpha \frac{y_t}{R_t}$	Demanda del capital
$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [R_{t+1}] \right]$	Ecuación de Euler
$\frac{\theta}{1-h_t} = \frac{w_t}{c_t}$	Oferta de trabajo
$h_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{w_t}$	Demanda de trabajo
$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
$k_{t+1} = i_t$	Ley de movimiento del capital
$lnA_t = \phi lnA_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

Modelo 3
Función Impulso Respuesta: choque a la productividad



Comparación Modelo 3 vs Modelo 4

Función Impulso Respuesta: choque a la productividad



Modelo 1: Función de utilidad

El modelo 1 corresponde al modelo de Long y Plosser (1983).

Función de utilidad

La función de utilidad utilizada en el modelo 3 y 4 es:

$$u(c_t, h_t) = ln(c_t) + \theta \frac{(1 - h_t)^{1-\gamma_n}}{1 - \gamma_n}$$

Considerando $\gamma_n = 1$ la función de utilidad es:

$$u(c_t, h_t) = ln(c_t) + \theta ln(1 - h_t)$$

Esta es la función de utilidad que Long y Plosser (1983) consideran en su modelo.

Modelo 1: sistema de ecuaciones principales

Las ecuaciones principales se mantienen iguales al modelo 4, excepto la oferta de trabajo ya que ahora se considera $\gamma_n = 1$ y la ecuación de Euler y la ecuación del movimiento del capital, en las cuales se ha reemplazado $\delta = 1$.

Ecuaciones	Descripción
$k_t = \alpha \frac{y_t}{R_t}$	Demanda del capital
$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [R_{t+1}] \right]$	Ecuación de Euler
$\frac{\theta}{1-h_t} = \frac{w_t}{c_t}$	Oferta de trabajo
$h_t = (1-\alpha) \frac{y_t}{w_t}$	Demanda de trabajo
$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
$k_{t+1} = i_t$	Ley de movimiento del capital
$lnA_t = \phi lnA_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

Modelo 1
Función Impulso Respuesta: choque a la productividad