Clase 6: Modelo NEK estándar

Hamilton Galindo

Macrodinámica II

Junio - Agosto
2015

Clase de hoy consiste en...

1. **El modelo NEK estándar**
   - Las familias
   - Las firmas
   - Modelo Log-lineal
   - Derivación de la Curva IS-dinámica
   - Derivación de la Curva de Phillips NEK
   - Regla de política monetaria
   - Las tres ecuaciones del modelo NEK
   - Choques
2. **IRFs**
3. **Análisis de sensibilidad**
   - Choque de productividad

Generalidades

Modelo NEK está caracterizado por (Cap.3 Galí, 2008):

1. Economía cerrada.
2. El único factor de producción es el trabajo (no hay capital).
3. El gobierno no consume bienes finales (no hay G_t).
4. Competencia monopolística en el mercado de bienes (Dixit-Stiglitz, 1977).
5. Competencia perfecta en el mercado de factores.
6. Rigidez de precios en el mercado de bienes (Calvo, 1983).

Supuestos

Las familias se caracterizan por:

1. Preferencias sobre todos los bienes de la economía (preferencia por la variedad)
2. Ofrecen trabajo
3. Disponen de un activo de ahorro (bonos del gobierno)
4. Toman decisiones intratemporales e intertemporales

Función de utilidad

$$U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \tag{1}$$

- C_t es una canasta de consumo (índice de cantidad) sobre todos los bienes diferenciados que existen en la economía (agregador a la Dixit-Stiglitz).

$$C_t = \left[\int_0^1 c_t(i)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \partial i \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \tag{2}$$

- N_t representa los serviciós laborales $(N_t + O_t = 1)$, donde O_t es el ocio.
- Además, σ es el coeficiente de aversión al riesgo (relativo), φ es la inversa de la elasticidad de la oferta de trabajo y ϵ es la elasticidad de sustitución entre bienes.

Restricción presupuestaria (RP)

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + T_t \tag{3}$$

Donde:

- La RP está en términos nominales
- El gasto de la familia en la canasta de consumo es $P_t C_t$ y es igual a :

$$P_t C_t = \int_0^1 P_t(i) C_t(i) \partial i$$

- Q_t representa el precio del bono
- El bono (B_t) rinde una unidad monetaria en el periodo siguiente. En t se tendría $B_{t-1} x 1 um$
- W_t es el salario nominal y T_t representa los dividendos de las firmas (las familias son dueñas de las firmas).

Problema de optimalidad

Las familias toman dos decisiones temporales:

1. *Intratemporal:* maximizar su consumo entre los diferentes bienes sujeto a su gasto.
2. *Intertemporal:* maximizar su función de utilidad esperada descontada sujeto a su restricción presupuestaria.

Problema intratemporal

$$\underset{\{C_t(i)\}}{\text{Max}}\ C_t \tag{4}$$

s.a

$$\int_0^1 P_t(i)C_t(i)\partial i = Z_t \tag{5}$$

Donde, Z_t es el nivel dado de gasto igual a $P_t C_t$

Dixit-Stiglitz (1977)

Recordar el método de "**Presupuesto en dos estados**": **[1]** en el primer estado se determina el gasto total en la canasta de consumo, y **[2]** en el segundo estado se determina la demanda de cada bien particular.

Problema intratemporal
Condición de primer orden

- **Lagrangeano**

$$\mathcal{L} = \left[\int_0^1 c_t(i)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \partial i\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + \lambda\left[Z_t - \int_0^1 P_t(i) C_t(i) \partial i\right]$$

- **Derivada con respecto a $C_t(i)$**

$$\begin{aligned}
\left(\frac{C_t}{C_t(i)}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} &= \lambda_t P_t(i), \quad \forall i \in [0,1] \\
\left(\frac{C_t}{C_t(j)}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} &= \lambda_t P_t(j), \quad \text{para } j \\
\left(\frac{C_t(j)}{C_t(i)}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} &= \frac{P_t(i)}{P_t(j)}, \quad \text{para } i \wedge j \\
C_t(i) &= \left(\frac{P_t(i)}{P_t(j)}\right)^{-\epsilon} C_t(j) \qquad (6)
\end{aligned}$$

Problema intratemporal
En el índice de consumo...

$$
\begin{aligned}
C_t &= \left[\int_0^1 C_t(i)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \partial i \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \\
C_t &= \left[\int_0^1 \left[\left(\frac{P_t(i)}{P_t(j)} \right)^{-\epsilon} C_t(j) \right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \partial i \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \\
C_t &= \frac{C_t(j)}{P_t(j)^{-\epsilon}} \left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \partial i \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Problema intratemporal
En la restricción de gasto...

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 P_t(i)C_t(i)\partial i &= P_tC_t \\
\int_0^1 P_t(i)\left[\left(\frac{P_t(i)}{P_t(j)}\right)^{-\epsilon} C_t(j)\right]\partial i &= P_tC_t \\
\left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}\partial i\right]\frac{C_t(j)}{P_t(j)^{-\epsilon}} &= P_tC_t
\end{aligned} \qquad (8)
$$

Problema intratemporal
Índice de precios

De [7] y [8] se obtiene el índice de precios:

- De [7]:

$$C_t \frac{P_t(j)^{-\epsilon}}{C_t(j)} = \left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \partial i \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

- De [8]:

$$\left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \partial i \right] = P_t C_t \frac{P_t(j)^{-\epsilon}}{C_t(j)}$$

- Luego [7] en [8]:

$$\left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \partial i \right] = P_t \left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \partial i \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

- Índice de precios es...

$$P_t = \left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \partial i \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}} \tag{9}$$

Problema intratemporal
Demanda del bien $j-$ésimo

Considerando el índice de precio [9] en la ecuación [8] se obtiene la demanda del bien $j-$ésimo:

$$C_t(j) = C_t \left[\frac{P_t(j)}{P_t} \right]^{-\epsilon} \tag{10}$$

Elasticidad de sustitución entre bienes	Elasticidad precio de la demanda
$\frac{\partial ln(c_t(i)/c_t(j))}{\partial ln(p_t(i)/p_t(j))} = \epsilon$ Ecu. [6]	$\frac{\partial ln(c_t(j))}{\partial ln(p_t(j))} = \epsilon$ Ecu. [10]

Problema intratemporal
¿Que representa λ?

- Recordemos el CPO para el bien $j-$ésimo:

$$\left(\frac{C_t}{C_t(j)}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} = \lambda_t P_t(j)$$

- De la demanda del bien $j-$ésimo [ecuación 10]:

$$\frac{C_t}{C_t(j)} = \left[\frac{P_t(j)}{P_t}\right]^{\epsilon}$$

- Reemplazando en la CPO:

$$\lambda_t = \frac{1}{P_t}$$

- **Nota:** en el problema dual (minimización de costos sujeto a la canasta de consumo) λ es igual al precio (P_t).

Problema intertemporal

$$\underset{\{C_t, N_t, B_t\}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} U(C_t, N_t)$$

s.a

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + T_t \tag{11}$$

Problema intertemporal
Condiciones de primer orden

- **Lagrangeano**

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big[U(C_t, N_t) + \lambda_t [B_{t-1} + W_t N_t - P_t C_t - Q_t B_t] \Big]$$

- **CPO**

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0\right], \quad C_t^{-\sigma} + \lambda_t[-P_t] = 0 \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0\right], \quad -N_t^{\varphi} + \lambda_t[W_t] = 0 \tag{13}$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = 0\right], \quad E_t\left\{\lambda_t[-Q_t] + \beta\lambda_{t+1}[1]\right\} = 0 \tag{14}$$

Problema intertemporal
Ecuaciones principales

- **Oferta de trabajo**

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{N_t^{\varphi}}{C_t^{-\sigma}} \tag{15}$$

- **Ecuación de Euler**

$$\frac{C_t^{-\sigma}}{P_t} Q_t = \beta E_t \left[\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{P_{t+1}} \right] \tag{16}$$

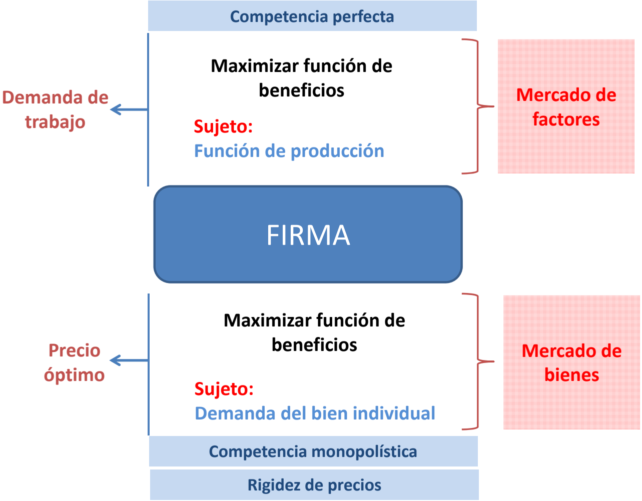
Supuestos

- Existe un continuum de firmas indexadas por $i \in [0, 1]$
- Cada firma produce un bien diferenciado (competencia monopolística en el mercado de bienes)

$$Y_t(i) = A_t N_t(i)^{1-\alpha} \tag{17}$$

- Las empresas enfrentan rigideces de precios a la Calvo (1983)
  - Cada firma puede re-optimizar su precio $P_t(i)$ con probabilidad $1 - \theta$ en cada periodo.
  - Una proporción $1 - \theta$ de firmas re-optimizan su precio en t.
  - Una proporción θ mantienen fijo su precio en t, siendo θ un indicador de la "rigidez de precios".

Optimalidad de las firmas



Optimalidad en el mercado de factores

$$\underset{\{N_t(i)\}}{\text{Max}}\ \Pi_t^{firma} = P_t(i)Y_t(i) - W_tN_t(i) \tag{18}$$

s.a

$$Y_t(i) = A_tN_t(i)^{1-\alpha} \tag{19}$$

- Mercado de factores es competitivo (precios flexibles), entonces W_t esta dado.
- Luego de introducir la función de producción en la función de beneficios se deriva con respecto a $N_t(i)$ para obtener la CPO.
- De la CPO se obtiene la demanda de trabajo:

$$P_t(i)A_t(1-\alpha)N_t(i)^{-\alpha} = W_t \tag{20}$$

El costo total

- **Costo total**

$$CT_t(i) = W_t N_t(i) \tag{21}$$

- De la función de producción [ecuación 17]

$$N_t(i) = \left(\frac{Y_t(i)}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{22}$$

- Introduciendo [22] en la función de costo [21] se obtiene:

$$CT_t(i) = W_t \left(\frac{Y_t(i)}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

El costo marginal

- **Costo marginal nominal** $cm_t^n(i)$

$$\frac{\partial CT_t(i)}{\partial Y_t(i)} = CM_t^n(i) = \frac{W_t}{1-\alpha}\frac{Y_t(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A_t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{23}$$

- Se reemplaza $Y_t(i)$ de la función de producción:

$$CM_t^n(i) = \frac{W_t}{(1-\alpha)A_t N_t(i)^{-\alpha}}$$

- Multiplicando por $N_t(i)$ a la ecuación anterior se obtiene:

$$CT_t(i) = (1-\alpha)CM_t^n(i)Y_t(i) \tag{24}$$

Optimalidad en el mercado de bienes

La función de beneficios (firmas que re-optimizan)

$$\Pi_{t+k,t}^{firma} = P_t^* Y_{t+k,t}(i) - W_{t+k} N_{t+k,t}(i) \tag{25}$$

- Donde $\Pi_{t+k,t}^{firma}$ es el beneficio de la firma $i-$ésima en el periodo $t+k$ que re-optimiza en t. De igual forma con $Y_{t+k,t}(i)$
- P_t^* es el precio óptimo que determina la firma en t
- De la ecuación [24] se tiene:

$$CT_t(i) = W_t N_t(i) = (1-\alpha) CM_t^n(i) Y_t(i)$$

- La función de beneficios queda de la siguiente forma:

$$\Pi_{t+k,t}^{firma} = \left[P_t^* - (1-\alpha) CM_{t+k,t}^n(i) \right] Y_{t+k,t}(i)$$

Optimalidad en el mercado de bienes
La demanda del bien $i-$ésimo que enfrenta la firma

- La firma $i-$ésima enfrenta una demanda del único bien que produce (bien i)
- Dado que no hay compras del gobierno (G) ni inversión (I), entonces la producción de la firma $i-$ésima es totalmente consumida por la familia:

$$Y_t(i) = C_t(i), \quad \forall i \in [0,1] \tag{26}$$

- En la demanda de bienes que enfreta la firma [ecuación 10]:

$$\begin{aligned} C_t(i) &= C_t\left[\frac{P_t(i)}{P_t}\right]^{-\epsilon} \\ Y_t(i) &= Y_t\left[\frac{P_t^*}{P_t}\right]^{-\epsilon} \\ Y_{t+k,t}(i) &= Y_{t+k}\left[\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right]^{-\epsilon} \end{aligned} \tag{27}$$

Optimalidad en el mercado de bienes I
Problema de optimización de la firma $i-$ésima

La función objetivo de la firma es:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} \Pi_{t+k,t}^{firma} \right]$$

Problema de optimización de las firmas

$$\underset{\{P_t^*\}}{\text{Max}} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} \left[P_t^* - (1-\alpha) cm_{t+k,t}^n(i) \right] Y_{t+k,t}(i) \right] \tag{28}$$

s.a

$$Y_{t+k,t}(i) = Y_{t+k} \left[\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right]^{-\epsilon}$$

Optimalidad en el mercado de bienes II
Problema de optimización de la firma $i-$ésima

Introduciendo la restricción dentro de la función objetivo:

$$\underset{\{P_t^*\}}{\text{Max}} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} \left[P_t^* - (1-\alpha) CM_{t+k,t}^n(i) \right] Y_{t+k} \left[\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right]^{-\epsilon} \right] \tag{29}$$

Donde:

- θ es la probabilidad de que la firma mantenga fijo su precio en los siguientes periodos (t+1, t+2, ...).
- $Q_{t,t+k}$ es el factor de descuento estocástico (se obtiene de la ecuación de Euler de las familias).

$$Q_{t,t+k} = \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+k}}$$

Optimalidad en el mercado de bienes I
CPO: precio óptimo

Derivando la ecuación [29] con respecto a P_t^* se obtiene la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} \frac{Y_{t+k}}{P_{t+k}^{-\epsilon}} \left[(1-\epsilon) P_t^{*\,-\epsilon} + (1-\alpha)\epsilon CM_{t+k,t}^n(i) P_t^{*\,-\epsilon-1} \right] \right] &= 0 \\
\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} \frac{Y_{t+k} P_t^{*\,-\epsilon}}{P_{t+k}^{-\epsilon}} \left[(1-\epsilon) + (1-\alpha)\epsilon CM_{t+k,t}^n(i) P_t^{*\,-1} \right] \right] &= 0 \\
\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k,t} \left[(1-\epsilon) + (1-\alpha)\epsilon CM_{t+k,t}^n(i) P_t^{*\,-1} \right] \right] &= 0 \\
\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k,t} \left[(1-\epsilon) P_t^{*} + (1-\alpha)\epsilon CM_{t+k,t}^n(i) \right] \right] &= 0 \quad (30)
\end{aligned}
$$

1. En $P_{flexibles} \rightarrow \theta = 0$:

$$P_t^* = (1-\alpha) \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} CM_{t+k,t}^n \quad (31)$$

Optimalidad en el mercado de bienes II
CPO: precio óptimo

2. Para obtener el equilibrio con competencia monopolística y precios flexibles ($\theta = 0$).
3. $\mathcal{M} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}$, donde $\mathcal{M}$ es el markup en ausencia de rigideces nominales
4. Se define $CM_{t+k,t}(i)$ como el costo marginal real en $t+k$ de la firma $i-$ésima que re-optimza en t.

$$CM^r_{t+k,t}(i) = \frac{CM^n_{t+k,t}(i)}{P_{t+k}} \tag{32}$$

5. Se define $\Pi_{t,t+k} = \frac{P_{t+k}}{P_t}$
6. En [30] se divide por P_{t-1}:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k,t} \left[(1-\epsilon) \frac{P^*_t}{P_{t-1}} - (1-\alpha)\epsilon \frac{CM^n_{t+k,t}(i)}{P_{t+k}} \frac{P_{t+k}}{P_{t-1}} \right] \right] = \tag{33}$$

Optimalidad en el mercado de bienes III
CPO: precio óptimo

7. Entonces la ecuación de precio óptimo sería:

Precio óptimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k,t} \left[\frac{P_t^*}{P_{t-1}} - \mathcal{M}(1-\alpha) CM^r_{t+k,t}(i) \Pi_{t-1,t+k} \right] \right] = 0 \tag{34}$$

Dinámica del precio agregado I

- Recordando el índice de precios [ecuación 9] :

$$P_t = \left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} \partial i \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

- Recordando que:
  - Una proporción θ mantiene su precio fijo en t; es decir, que el precio del periodo anterior $t-1$ se mantiene en t: $P_t(i) = P_{t-1}$, similar para todas las firmas que no re-optimzan (no depende de i).
  - La otra proporción de firmas $1-\theta$ re-optimiza su precio: el precio óptimo de estas firmas es P_t^*, similar para todas las firmas que re-optimizan (no depende de i).

Dinámica del precio agregado II

- Del índice de precios:

$$
\begin{aligned}
P_t &= \left[\int_0^{\theta} P_t(i)^{1-\epsilon}\partial i + \int_{\theta}^{1} P_t(i)^{1-\epsilon}\partial i\right]^{\frac{1}{1-\epsilon}} \\
P_t &= \left[\int_0^{\theta} P_{t-1}^{1-\epsilon}\partial i + \int_{\theta}^{1} P_t^{*\,1-\epsilon}\partial i\right]^{\frac{1}{1-\epsilon}} \\
P_t &= \left[\theta P_{t-1}^{1-\epsilon} + (1-\theta)P_t^{*\,1-\epsilon}\right]^{\frac{1}{1-\epsilon}} \\
\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon} &= \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon} \\
\text{Sea:}\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad \Pi_t &= \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon} \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Familias I
Ecuaciones log-lineal

1. Oferta de trabajo [eq. 15]

$$w_t - p_t = \varphi n_t + \sigma c_t \tag{36}$$

2. Ecuación de Euler [eq. 16]

$$\sigma c_t + p_t - q_t = E_t[\sigma c_{t+1} + p_{t+1}] \tag{37}$$

   1. Se asume que: $Q_t = \frac{1}{1+i_t}$
   2. Para valores pequeños de i_t ($< 20\,\%$) se puede considerar la siguiente aproximación:
   $$1 + i_t \cong e^{i_t}$$
   3. Por tanto:
   $$Q_t = e^{-i_t} \tag{38}$$

Familias II
Ecuaciones log-lineal

4. log-linealizando Q_t:

$$Q_t = Q_{ss} e^{q_t}$$

5. Aplicando "ln" se tiene:

$$\rho - i_t = q_t \tag{39}$$

Donde: $\rho = -ln\beta$ y $Q_{ss} = \beta$

6. Además, la inflación bruta esta definida como:

$$\begin{aligned} \Pi_{t+1} &= \frac{P_{t+1}}{P_t} \\ \text{log-lineal} \quad \pi_{t+1} &= p_{t+1} - p_t \end{aligned} \tag{40}$$

7. La ecuación [39] y [40] en [37]:

Ecuación de Euler log-lineal

$$c_t = E_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t \pi_{t+1} - \rho] \tag{41}$$

Derivación de la Curva IS-dinámica I

1. **Ecuación de Euler log-lineal en competencia monopolística y sin fricciones nominales** $(P_{flexibles})$
   - El producto está en su nivel natural y considerando que se está en equilibrio $c_t = y_t$, se tiene la EE:

$$y_t^n = E_t y_{t+1}^n - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t \pi_{t+1} - \rho] \tag{42}$$

   - La tasa de interés real natural se obtiene de la ecuación de Fisher:

$$r_t^n = i_t - E_t \pi_{t+1} \tag{43}$$

   - De la EE,

$$\begin{aligned} i_t - E_t \pi_{t+1} &= \sigma E_t[y_{t+1}^n - y_t^n] + \rho \\ r_t^n &= \sigma E_t[\Delta y_{t+1}^n] + \rho \end{aligned} \tag{44}$$

Derivación de la Curva IS-dinámica II

2. **Ecuación de Euler log-lineal en competencia monopolística y con fricciones nominales ($P_{rigidos}$)**
   - Brecha producto: $\widetilde{y}_t = y_t - y_t^n$
   - Dado que no estamos en el "nivel natural", la ecuación de Fisher es:

$$r_t = i_t - E_t\pi_{t+1}$$

   - Escribiendo la EE en términos de brecha producto (considerando equilibrio en el mercado de bienes):

$$\begin{aligned} y_t &= E_t y_{t+1} - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho] \\ y_t - y_t^n &= E_t[y_{t+1} - y_{t+1}^n] - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho] - y_t^n + E_t y_{t+1}^n \\ \widetilde{y}_t &= E_t\widetilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho] - E_t[y_{t+1}^n - y_t^n] \qquad (45) \end{aligned}$$

Derivación de la Curva IS-dinámica III

De la definición de la tasa natural de interés r_t^n:

$$r_t^n = \sigma E_t[\Delta y_{t+1}^n] + \rho$$

Se obtiene:

$$E_t[\Delta y_{t+1}^n] = \frac{1}{\sigma}[r_t^n - \rho]$$

Esta última expresión en [45] se obtiene la **IS-dinámica**:

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}_t &= E_t\widetilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho] + E_t[y_{t+1}^n - y_t^n] \\
\widetilde{y}_t &= E_t\widetilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho] + E_t[\Delta y_{t+1}^n] \\
\widetilde{y}_t &= E_t\widetilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho] + \frac{1}{\sigma}[r_t^n - \rho]
\end{aligned} \tag{46}$$

Derivación de la Curva IS-dinámica IV

IS-dinámica

$$\widetilde{y}_t = E_t\widetilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}[i_t - E_t\pi_{t+1} - r_t^n] \tag{47}$$

$$\widetilde{y}_t = E_t\widetilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}[r_t - r_t^n] \tag{48}$$

Firmas I
Ecuaciones log-lineal

1. **Función de producción**

$$y_t = a_t + (1-\alpha)n_t \tag{49}$$

2. **Dinámica del precio agregado**

$$\pi_t = (1-\theta)(p_t^* - p_t) \tag{50}$$

3. **Demanda de trabajo**

$$p_t + a_t - \alpha n_t = w_t \tag{51}$$

4. **Costo marginal real**

Firmas II
Ecuaciones log-lineal

- Dividiendo la ecuación del costo marginal nominal por el nivel de precios (P_t) se obtiene el costo marginal real $CM_t^r(i)$:

$$CM_t^r(i) = \frac{CM_t^n(i)}{P_t} = \frac{W_t}{P_t(1-\alpha)} \frac{Y_t(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A_t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{52}$$

- Log-linealizando se tiene:

$$\begin{aligned} cm_t^r(i) &= w_t - p_t - a_t + \alpha n_t \\ cm_{t+k}^r(i) &= w_{t+k} - p_{t+k} - a_{t+k} + \alpha n_{t+k}, \quad \text{para "t+k"} \end{aligned} \tag{53}$$

- Se define $cm_{t+k,t}^r(i)$ como el costo marginal real en $t+k$ de la firma $i-$ésima que re-optimiza en t.

$$cm_{t+k,t}^r(i) = w_{t+k} - p_{t+k} - a_{t+k} + \alpha n_{t+k,t} \tag{54}$$

Firmas III
Ecuaciones log-lineal

- De [54] y [53]:

$$cm^r_{t+k,t}(i) - cm^r_{t+k}(i) = \alpha(n_{t+k,t} - n_{t+k}) \tag{55}$$

- De la función de producción se tiene:

$$\frac{y_{t+k} - a_{t+k}}{1-\alpha} = n_{t+k} \parallel \frac{y_{t+k,t} - a_{t+k}}{1-\alpha} = n_{t+k,t} \tag{56}$$

- Introduciendo [56] en [56]:

$$cm^r_{t+k,t}(i) - cm^r_{t+k}(i) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(y_{t+k,t} - y_{t+k}) \tag{57}$$

- De la ecuación [27] se tiene:

$$\begin{aligned} Y_{t+k,t}(i) &= Y_{t+k}\left[\frac{P^*_t}{P_{t+k}}\right]^{-\epsilon} \\ \text{[log-lineal]} \quad y_{t+k,t} - y_{t+k} &= -\epsilon(p^*_t - p_{t+k}) \end{aligned} \tag{58}$$

Firmas IV
Ecuaciones log-lineal

- Reemplazando [58] en [57] se tiene:

$$cm^r_{t+k,t}(i) - cm^r_{t+k}(i) = -\frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(p^*_t - p_{t+k}) \tag{59}$$

5. **Precio óptimo de la firma $i-$ésima**
   - Colocando la ecuación [34] en estado estacionario:

$$CM^r_{ss} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{\epsilon-1}{\epsilon}$$

   - Además en SS:

$$\begin{aligned} Q_{t,t+k} &= \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+k}} \\ Q_{kss} &= \beta^k \end{aligned} \tag{60}$$

Firmas V
Ecuaciones log-lineal

- Log-linealizando [34], donde $Q_{t,t+k}$ en SS es β^k:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[Y_{ss}e^{q_{t,t+k}+y_{t+k,t}}\left[e^{p_t^*-p_{t-1}}-\mathcal{M}(1-\alpha)CM_{ss}^r e^{cm_{t+k,t}^r(i)+\pi_{t-1,t+k}}\Pi_{ss}\right]\right]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[e^{q_{t,t+k}+y_{t+k,t}}\left[e^{p_t^*-p_{t-1}}-e^{cm_{t+k,t}^r(i)+\pi_{t-1,t+k}}\right]\right]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[e^{q_{t,t+k}+y_{t+k,t}+p_t^*-p_{t-1}}-e^{q_{t,t+k}+y_{t+k,t}+cm_{t+k,t}^r(i)+\pi_{t-1,t+k}}\right]$$

Firmas VI
Ecuaciones log-lineal

- Por tanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[p_t^* - p_{t-1} - cm_{t+k,t}^r(i) - \pi_{t-1,t+k}\right] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[p_t^* - p_{t-1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[cm_{t+k,t}^r(i) + \pi_{t-1,t+k}\right] \tag{61}$$

Expresión log-lineal del precio óptimo

$$\left[p_t^* - p_{t-1}\right]\frac{1}{1-\theta\beta} = \sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[cm_{t+k,t}^r(i) + p_{t+k} - p_{t-1}\right] \tag{62}$$

Curva de Phillips NEK I

1. Partimos de la ecuación [61] (precio óptimo):

$$\left[p_t^* - p_{t-1}\right] \frac{1}{1-\theta\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k E_t \left[cm_{t+k,t}^r(i) + p_{t+k} - p_{t-1}\right]$$

2. Recordando la ecuación [59]:

$$cm_{t+k,t}^r(i) - cm_{t+k}^r(i) = -\frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(p_t^* - p_{t+k})$$

3. Esta última ecuación se introduce en la ecuación de precio óptimo:

$$\left[p_t^* - p_{t-1}\right] \frac{1}{1-\theta\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k E_t \left[cm_{t+k}^r(i) - \frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(p_t^* - p_{t+k}) + p_{t+k} - p_{t-1}\right]$$

Curva de Phillips NEK II

4. Operando se tiene:

$$p_t^*\left[\frac{1-\alpha+\epsilon\alpha}{1-\alpha}\right]=(1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[cm_{t+k}^r(i)+p_{t+k}\frac{1-\alpha+\epsilon\alpha}{1-\alpha}\right]$$

5. Reordenando se tiene:

$$p_t^*-p_{t-1}=(1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[\Theta cm_{t+k}^r(i)+p_{t+k}-p_{t-1}\right] \quad (63)$$

Donde:

$$\Theta=\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\epsilon}<1$$

Curva de Phillips NEK III

6. La ecuación de precio óptimo en forma de “ecuación en diferencias”
[a] Eliminando p_{t-1} de la ecuación [63]

$$p_t^* = (1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[\Theta cm_{t+k}^r(i) + p_{t+k}\right] \tag{64}$$

[b] En “t+1”

$$p_{t+1}^* = (1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_{t+1}\left[\Theta cm_{t+k+1}^r(i) + p_{t+k+1}\right]$$

[c] Aplicando “E_t”

$$E_t p_{t+1}^* = (1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[\Theta cm_{t+k+1}^r(i) + p_{t+k+1}\right]$$

Curva de Phillips NEK IV

Por expectativas iteradas: $E_t[E_{t+1}x_{t+1}] = E_t[x_{t+1}]$
[d] Cambio de variable: $j = k + 1$

$$E_t p^*_{t+1} = (1-\theta\beta)\sum_{j=1}^{\infty}(\theta\beta)^{j-1}E_t\left[\Theta cm^r_{t+j}(i) + p_{t+j}\right]$$

[e] Volviendo a "k" (tratando "j" como si fuese "k")

$$E_t p^*_{t+1} = \frac{(1-\theta\beta)}{\theta\beta}\sum_{k=1}^{\infty}(\theta\beta)^{k}E_t\left[\Theta cm^r_{t+j}(i) + p_{t+j}\right] \qquad (65)$$

[f] Operando en la ecuación [64] (periodo "0" y agrupando para $k \geq 1$)

$$p^*_t = (1-\theta\beta)[\Theta cm^r_t(i)+p_t]+(1-\theta\beta)\sum_{k=1}^{\infty}(\theta\beta)^{k}E_t\left[\Theta cm^r_{t+k}(i)+p_{t+k}\right]$$

Curva de Phillips NEK V

Pero de la ecuación [65] se sabe:

$$(\theta\beta)E_t p^*_{t+1} = (1-\theta\beta)\sum_{k=1}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left[\Theta cm^r_{t+j}(i) + p_{t+j}\right]$$

Por tanto:

$$p^*_t = (1-\theta\beta)[\Theta cm^r_t(i) + p_t] + (\theta\beta)E_t p^*_{t+1}$$

[g] Agregando "$-p_{t-1}$" a esta última ecuación

$$p^*_t - p_{t-1} = (1-\theta\beta)[\Theta cm^r_t(i) + p_t] + (\theta\beta)E_t p^*_{t+1} - p_{t-1}$$

Ordenando esta ecuación se obtiene:

Curva de Phillips NEK VI

Ecuación del precio óptimo en forma de "ecuación en diferencias"

$$p_t^* - p_{t-1} = \beta\theta E_t\left[p_{t+1}^* - p_t\right] + (1-\beta\theta)\Theta cm_t^r(i) + \pi_t \tag{66}$$

7. Recordando que (del índice de precio log-lineal):

$$\pi_t = (1-\theta)(p_t^* - p_{t-1}) \tag{67}$$

8. Se tendría:

Curva de Phillips dependiente del costo marginal

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda cm_t^r \tag{68}$$

Donde:

$$\lambda = \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta}\Theta$$

Curva de Phillips NEK VII

9. Para obtener la **Curva de Phillips** se debe de obtener una expresión que relacione el costo marginal real (mc_t^r) con la brecha producto ($\widetilde{y}_t$). Para ello se hace lo siguiente:
   - **Producto natural:** del equilibrio del mercado de trabajo

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{N_t^{\varphi}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{Y_t}{N_t}$$

   - Del equilibrio en el mercado de bienes:

$$Y_t = C_t$$

   - Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{N_t^{\varphi}}{C_t^{-\sigma}} &= \frac{Y_t}{N_t} \\ N_t &= Y_t^{\frac{1-\sigma}{1+\varphi}} \end{aligned} \tag{69}$$

Curva de Phillips NEK VIII

- En la función de producción:

$$
\begin{aligned}
Y_t^n &= A_t N_t^{1-\alpha} \\
Y_t^n &= A_t \left[Y_t^{\frac{1-\sigma}{1+\varphi}} \right]^{1-\alpha} \\
Y_t^n &= \left[A_t \right]^{\frac{1+\varphi}{1+\varphi-(1-\alpha)(1-\sigma)}}
\end{aligned} \tag{70}
$$

- Esta última ecuación log-lineal es:

Producto natural log-lineal

$$
y_t^n = \frac{1+\varphi}{1+\varphi-(1-\alpha)(1-\sigma)} a_t \tag{71}
$$

- **En la ecuación de costo marginal real [53]** (recordar que esta ecuación se obtiene de la demanda de trabajo):

$$
cm_t^r = [w_t - p_t] - a_t + \alpha n_t
$$

Curva de Phillips NEK IX

- De la oferta de trabajo se tiene:

$$w_t - p_t = \varphi n_t + \sigma y_t$$

- De la función de producción:

$$n_t = \frac{y_t - a_t}{1-\alpha}$$

- Por tanto se tiene:

$$\begin{aligned}
cm_t^r &= [\varphi n_t + \sigma y_t] - a_t + \alpha n_t \\
cm_t^r &= \sigma y_t - a_t + (\varphi + \alpha) n_t \\
cm_t^r &= \sigma y_t - a_t + (\varphi + \alpha) \frac{y_t - a_t}{1-\alpha} \\
cm_t^r &= \left[\sigma + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha}\right]\left[y_t - \frac{1+\varphi}{1+\varphi-(1-\alpha)(1-\sigma)} a_t\right] \\
cm_t^r &= \left[\sigma + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha}\right](y_t - y_t^n) \qquad (72)
\end{aligned}$$

Curva de Phillips NEK X

- Esta última ecuación se introduce en [68]:

Curva de Phillips NEK

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa \widetilde{y}_t \tag{73}$$

Donde:

$$\kappa = \lambda \left[\sigma + \frac{\alpha + \varphi}{1 - \alpha} \right]$$

Regla de política monetaria I

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t + v_t \tag{74}$$

- Se asume que ϕ_π y ϕ_y son coeficientes no negativos y son elegidos por la autoridad monetaria.
- La elección del intercepto ρ hace la regla consistente con la inflación igual a cero en estado estacionario.
- v_t es un choque de política monetaria

Las tres ecuaciones del modelo NEK

Las tres ecuaciones del modelo NEK son:

Modelo NEK

IS-dinámica

$$\widetilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\pi_{t+1} - r_t^n) + E_t\widetilde{y}_{t+1}$$

Curva de Phillips

$$\pi_t = \beta E_t\pi_{t+1} + \kappa\widetilde{y}_t$$

Regla de PM

$$i_t = \rho + \phi_\pi\pi_t + \phi_y\widetilde{y}_t + v_t$$

Estabilidad de la solución del modelo

Sea el siguiente sistema de dos ecuaciones de expectativas racionales:

$$Y_t = AE_t Y_{t+1} + BV_t$$

Condiciones de Blanchard y Kahn

De la ecuación caracteristica:

$$\lambda^2 - \lambda tr(A) + det(A) = 0$$

Estabilidad de la solución del modelo

Los dos eigenvalores están dentro del circulo unitario si:

$$|det(A)| < 1 \tag{75}$$

$$|tr(A)| < 1 + det(A) \tag{76}$$

Choques

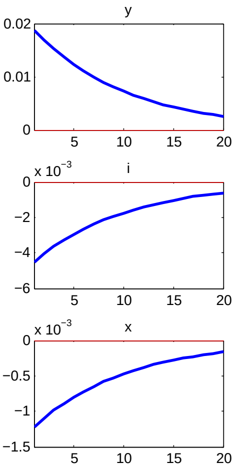
$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \epsilon_t^a \tag{77}$$

$$v_t = \rho_v v_{t-1} + \epsilon_t^v \tag{78}$$

IRFs: choque de productividad
¿Cuáles son los efectos de un choque de productividad?

1. **Choque productividad (a_t):** la economía experimenta un choque de productividad positivo, la cuál incrementa el producto natural ($\uparrow y_t^n$).
2. **Efecto 1 (CPH):** traslada a la derecha la curva de Phillips afectando la inflación ($\downarrow \pi_t$).
3. **Efecto 2 (IS-D):** traslada a la derecha la IS-dinámica incrementando la inflación y el producto. No obstante, este efecto no contraresta totalmente a la caída inicial de la inflación.
4. **Efecto 3 (x_t):** bajo la calibración actual del modelo la brecha producto se contrae (consistente con los datos - Galí. cap 3).
5. **Efecto 4 (RPM):** la autoridad monetaria ante la caída de la inflación y de la brecha producto implementa una política monetaria expansiva ($\uparrow i_t$).

IRFs: choque de productividad

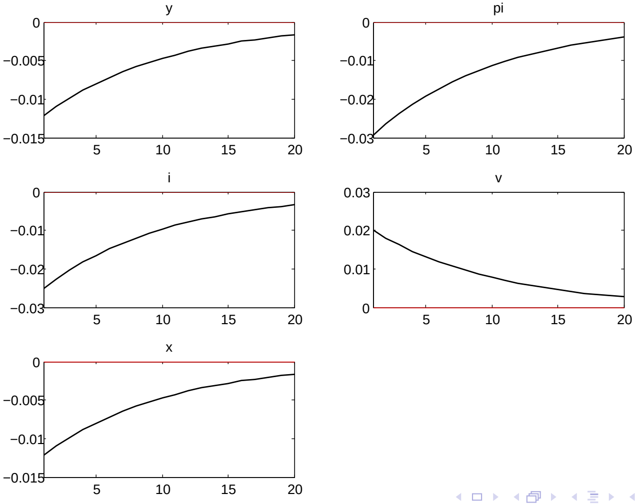


IRFs: choque monetario

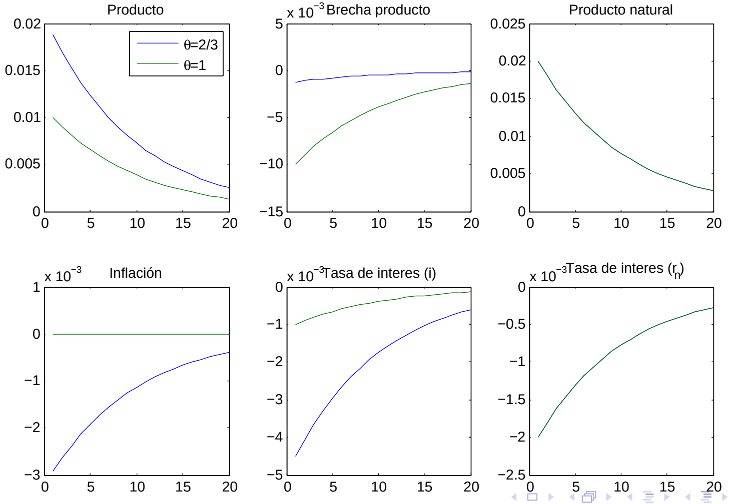
¿Cuáles son los efectos de un choque monetario?

1. **Choque monetario (v_t):** la autoridad monetaria incrementa la tasa de interés nominal (política monetaria contractiva).
2. **Efecto 1 (IS-D):** desincentiva las inversiones (ya que el costo de financiarse es mayor), esto contrae la demanda agregada (IS-dinámica).
3. **Efecto 2 (π_t):** la contracción de la demanda provoca un retroceso en los precios (menor inflación).
4. **Efecto 3 (y_t):** las firmas ante una menor demanda de las familias producen menos; por tanto, el producto agregado de la economía disminuye ($\downarrow y_t$).
5. **Efecto 4 (x_t):** dado que el producto natural (y_t^n) no se ve afectado pero sí el producto de la economía (y_t), entonces la brecha producto se contrae ($\downarrow x_t$).

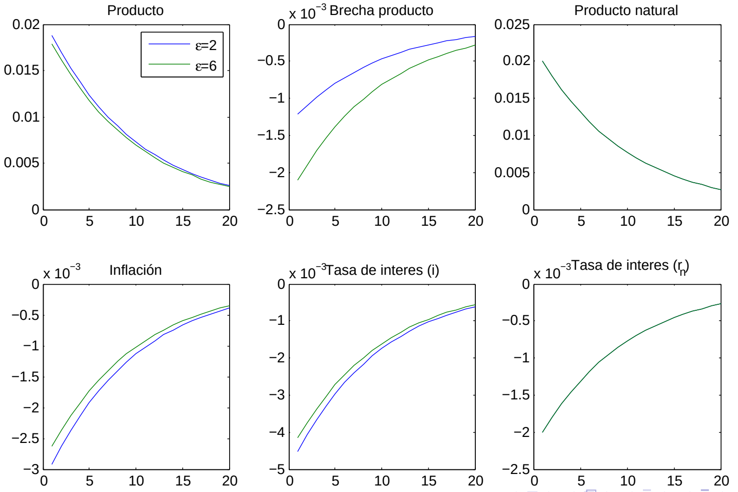
IRFs: choque monetario



¿Cuáles son los efectos de una mayor rigidez de precios?



¿Cuáles son los efectos de una mayor elasticidad de sustitución?



¿Cuáles son los efectos de una mayor ponderación de la inflación en la RPM?