

# Clase 6: Modelo de Hansen (1985)

## *Macrodinámica I*

Hamilton Galindo

Junio - Agosto  
2015

## Outline

- 1 **Crítica al modelo RBC estándar**
- 2 **Modelo de Hansen: Generalidades**
  - Motivación
  - Principales Características
  - No Convexidad en el Set de Consumo
  - Introducción de Loterías
- 3 **El Modelo de Hansen(1985)**
  - Modelo: Familias
  - Modelo: Firmas
  - Modelo: Equilibrio y Choque
  - Modelo: Calibración
  - Modelo: Estado Estacionario y Loglinearización
  - Modelo: IRFs
  - Modelo: Simulaciones
- 4 **Código en Dynare-Matlab**

## Crítica al modelo RBC estándar I

### Kydland y Prescott, 1982

- 1 **El modelo no explica las principales características del mercado de trabajo:**
  - No incluye el desempleo
  - No considera las fluctuaciones en la tasa de desempleo
  - Falla en capturar la alta volatilidad del total de horas trabajadas y la baja volatilidad del salario real (productividad: producto/empleo)
- 2 **Elasticidad de sustitución intertemporal:** dependencia fuerte de la disposición de los individuos de sustituir ocio a través del tiempo ante movimientos del salario y tasa de interés real. La evidencia empírica sostiene que la  $ESI_{ocio}$  es bajo [Atonji, 1984 y MaCurdy, 1981].
- 3 **Intensive margin:** el modelo supone que todos trabajan y que el individuo tiene la libertad de ajustar sus horas de trabajo. Por tanto en este modelo las volatilidad del total de horas trabajadas responde al ajuste de horas que hace el individuo.

## Motivación I

### Observando los datos

- 1 Sea  $H_t$  el número total de horas trabajadas,  $h_t$  el número promedio de horas trabajadas por un empleado, y  $N_t$  el número de trabajadores en la economía. Entonces:

$$H_t = h_t N_t \quad (1)$$

- 2 Tomando logaritmos a [1] y luego aplicando el operador varianza se tiene lo siguiente:

$$\text{var}(\ln H_t) = \text{var}(\ln h_t) + \text{var}(\ln N_t) + 2\text{cov}(\ln h_t, \ln N_t) \quad (2)$$

## Motivación II

### Observando los datos

- 3 Para la economía de EEUU, Hansen encontro que bajo esta descomposición, el 55 % de la varianza de  $H_t$  es explicada por la variación en  $N_t$  y solo el 20 % por la variación de  $h_t$ , el resto por la covarianza.

### Data Post-II guerra mundial para EEUU

Gran parte de la volatilidad del total de horas trabajadas se debe principalmente a la variación de empleados en el mercado de trabajo y una pequeña proporción al ajuste de horas de los trabajadores; además, hay un gran número de individuos que trabajan “full time” o no trabajan.

## Principales Características I

- 1 **Modelo:** modelo de crecimiento económico con [1]choque de productividad, y [2]trabajo indivisible

### Trabajo divisible

El trabajador ajusta su número de horas de trabajo. Supuesto del modelo de KP(1982).

- 2 **Principal supuesto:** el individuo decide trabajar un número de horas fijas ( $h_0$ ) o no trabajar; i.e, el trabajo es indivisible.
- 3 **Paper base:** Hansen se basa en el paper de Rogerston (1984,1988-JME), en el cual se estudia el trabajo indivisible y se introduce “loterías” para solucionar el problema introducido por esta no-convexidad.

## Principales Características II

- 4 **Implicancia del supuesto:** debido a que las horas de trabajo son transadas, y solo tiene dos valores  $\{0, h_0\}$ , entonces el “conjunto de posibilidades de consumo” es no convexa.
- 5 **Función de utilidad:** en este modelo hay una distinción crucial entre la función de utilidad de la “familia” (individuo) y del “agente representativo”.
  - **Familia:** su función de utilidad es logaritmica en ambos argumentos  $(c_t, l_t)$ , donde  $l_t$  es el ocio.
  - **Agente representativo (AR):** su función de utilidad es logaritmica en el consumo y lineal en el ocio.

## Principales Características III

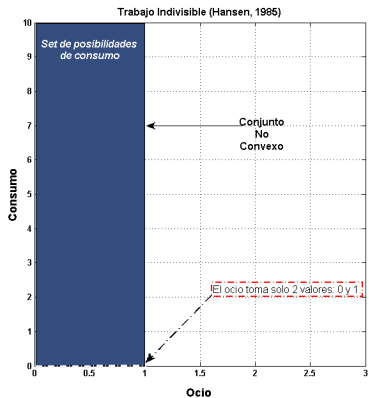
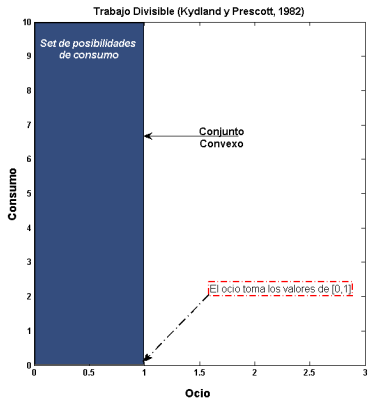
- 6 **Principal resultado:** el modelo explica la alta volatitidad del empleo en comparación al salario (productividad) sin necesitar una alta  $ESI_{ocio}$ . Este resultado es consistente con los datos [Atonji,1984; MaCurdy,1981].

### ¿A que se debe este resultado?

La función de utilidad del “AR” implica una  $ESI_{ocio}$  infinita, resultado que no depende de la  $ESI_{ocio}$  implicada de las preferencias de las “familias” quienes poblan la economía.



## No Convexidad en el Set de Consumo



## Introducción de Loterías I

- 1 La introducción de “loterías” en el modelo tiene dos implicaciones (Rogerson, 1984):
  - Vuelve convexo el conjunto de posibilidades de consumo, permitiendo el estudio del equilibrio competitivo resolviendo el problema del AR.
  - Permite que las firmas ofrescan un seguro total de desempleo
- 2 El individuo elige la probabilidad de trabajar ( $\alpha_t$ ) en “t”.

## Modelo: Familias I

- 1 Se supone que la economía esta poblada por un continuo de familias identicas de vida infinita con nombres en el intervalo cerrado  $[0,1]$ . De tal forma que la familia  $j$ -esima pertenece a dicho intervalo. Se denota a la familia como “ $j$ ”.
- 2 La familia es dueña del stock de capital y la alquila a la firma. El capital se comporta según la siguiente ecuación;

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t, \quad \delta \in [0, 1] \quad (3)$$

- 3 La restricción presupuestaria de la familia esta representada por:

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t \quad (4)$$

Donde  $h_t$  representa el trabajo y  $l_t$  el ocio, siendo la dotación temporal normalizada a uno ( $h_t + l_t = 1$ ).

## Modelo: Familias II

- 4 Las preferencias de la familia se representa por la siguiente función de utilidad:

$$u(c_t, l_t) = \ln c_t + A \ln l_t, \quad A > 0 \quad (5)$$

- 5 Se restringe el “**set de consumo**” de tal forma que los individuos deciden trabajar full time ( $h_0$  horas) o no trabajar.

### Equilibrio competitivo

Para llegar a un equilibrio competitivo es necesario que el set de posibilidades de consumo sea convexo; no obstante, a causa de que las “**horas trabajadas**” es un *commodity* transado, entonces el **set de consumo** es **no convexo**.

- 6 Para convertir el conjunto de posibilidades de consumo en un conjunto convexo se requiere la introducción de una **lotería**. Bajo este nuevo esquema, se transa un nuevo bien; “**contrato**” y ya no “**ocio**” (trabajo).

## Modelo: Familias III

- Los hogares venden un **contrato** a las firma, donde se especifica una probabilidad de trabajar ( $\alpha_t$ ) en un periodo determinado ( $t$ ).

### Probabilidad de trabajar vs. horas de trabajo

En este modelo las familias determinan  $\alpha_j$  para  $t = 0, 1, 2, \dots$  en lugar de determinar el número de horas de trabajo, y la firma se compromete a pagar un salario ( $w_t$ ) por el contrato en cada periodo de tiempo.

- Una lotería determina la proporción de familias que trabajan. Se asume que esta proporción también está representada por  $\alpha_t$ .
- A la familia se le paga de acuerdo a la probabilidad de trabajar (i.e., por el trabajo esperado) y no por el trabajo que realmente hace.

### Seguro de desempleo

Esto significa que la firma está proveyendo un seguro total por desempleo a las familias. Esto se aprecia en que la familia recibirá su salario cada periodo aunque existan periodos en los cuales no trabaje.

## Modelo: Familias IV

- Una familia determina:

Prob. trabajar/Prob. no trabajar	horas de trabajo	ocio
$\alpha_t \longrightarrow$	$h_0 \longrightarrow$	$1 - h_0$
$1 - \alpha_t \longrightarrow$	$0 \longrightarrow$	$1$

- 7 Debido a la presencia de la lotería el individuo considera la función de utilidad esperada, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Prob. trabajar	Horas de trabajo	ocio	Func. utilidad
$\alpha_t \longrightarrow$	$h_0 \longrightarrow$	$1 - h_0$	$\alpha_t [\ln(c_t) + A \ln(1 - h_0)]$
Prob. no trabajar $1 - \alpha_t \longrightarrow$	$0 \longrightarrow$	$1$	$(1 - \alpha_t) [\ln(c_t) + A \ln(1)]$

- 8 Entonces la **utilidad esperada** en  $t$  es:

$$U(c_t, \alpha_t) = \alpha_t [\ln(c_t) + A \ln(1 - h_0)] + (1 - \alpha_t) [\ln(c_t) + A \ln(1)] \quad (6)$$

## Modelo: Familias V

### Utilidad Esperada

$$U^e(c_t, \alpha_t) = \ln(c_t) + A\alpha_t \ln(1 - h_0)$$

Las variables de control de la familia son:  $c_t$  y  $\alpha_t$ , debido a que las horas ofrecidas es un parámetro ( $h_0$ ).

- 9 Asimismo, el trabajo esperado ( $h_t^e$ ) en el periodo  $t$  sería igual a:  
$$h_t = \alpha_t h_0 + (1 - \alpha_t)0 = \alpha_t h_0$$
- 10 La familia enfrenta el siguiente problema de optimización:

$$\text{Max}_{\{c_t, \alpha_t, k_{t+1}\}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln(c_t) + A\alpha_t \ln(1 - h_0)] \quad (7)$$

sujeto a su restricción presupuestaria (donde se ha introducido la LMK):

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = w_t(\alpha_t h_0) + r_t k_t \quad (8)$$

## Modelo: Familias VI

- 11 En este escenario, la oferta de trabajo esperada es  $h_t^e = \alpha_t h_0$ , perfectamente inelastica en el salario; i.e, la  $ESI_{trabajo}$  es cero.
- 12 Desde el punto de vista del planificador social (PS), lo que interesa a la economía en su conjunto es el trabajo. Por ello la función de utilidad que maximiza el “PS” es la siguiente:

$$\text{Max}_{\{c_t, h_t, k_{t+1}\}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln(c_t) + A \frac{h_t}{h_0} \ln(1 - h_0)] \quad (9)$$

- Se ha despejado  $\alpha_t$  de  $h_t^e = \alpha_t h_0$ .
  - En el agregado, la economía se comporta como un AR que tienen una función de utilidad lineal en el ocio.
  - **El principal resultado:**  $ESI_{trabajo}$  será infinita, indicando que la oferta de trabajo es perfectamente elástica (en términos agregados).
- 13 **Condiciones de optimización:**



## Modelo: Familias VII

- Oferta de Trabajo:

$$-B = \frac{w_t}{c_t}, \quad B = \frac{A}{h_0} \ln(1 - h_0) \quad (10)$$

- Ecuación de Euler:

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \frac{1}{c_{t+1}} [r_{t+1} + (1 - \delta)] \quad (11)$$

## Modelo: Familias VIII

### 14 Elasticidad de Sustitución Intertemporal de la Oferta de Trabajo:

#### Trabajo

1 Sea:  $UMgh_t = B$

2  $TMgSI_{t+1,t}^h = -E_t \left[ \frac{Umgh_t}{\beta Umgh_{t+1}} \right] = -E_t \left[ \frac{1}{\beta} \right] = -\frac{1}{\beta}$

3  $ESI_{t+1,t}^h = \frac{\partial \ln\left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right)}{\partial \ln(TMgSI_{t+1,t}^h)} = \frac{TMgSI_{t+1,t}^h}{\frac{h_{t+1}}{h_t}} \frac{1}{\partial TMgSI_{t+1,t}^h} = \infty$

## Modelo: Firms I

- 1 Se supone una sola firma en la economía, de tal forma que demandará el trabajo y capital en términos agregados.
- 2 La función de producción es neoclásica Cobb-Douglas:

$$y_t = A_t f(k_t, l_t) = A_t k_t^\theta h_t^{1-\theta}$$

### 3 Problema de Optimización

$$\text{Max}_{\{k_t, h_t\}} \pi_t = y_t - [w_t h_t + r_t k_t] \quad (12)$$

$$y_t = A_t k_t^\theta h_t^{1-\theta} \quad (13)$$

### 4 Condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial k_t} = 0 \implies k_t = \theta \frac{y_t}{r_t}, \text{ [Demanda del capital]} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial h_t} = 0 \implies h_t = (1 - \theta) \frac{y_t}{w_t}, \text{ [Demanda del trabajo]} \quad (15)$$

## Modelo: Equilibrio y Choque I

### 1 Choque a la productividad:

$$\ln A_{t+1} = \gamma \ln A_t + \epsilon_t, \quad \gamma \text{ mide la persistencia} \quad (16)$$

### 2 Equilibrio en el mercado de bienes:

$$y_t = c_t + i_t \quad (17)$$

## Modelo: Calibración

Parámetro	Valor	Nombre
$\theta$	0.36	participación del capital en la producción
$\delta$	0.025	tasa de depreciación
$\beta$	0.99	factor de descuento
A	2	es el ratio entre el tiempo que el individuo gasta en actividades no-market (2/3) con el tiempo que destina a actividades de market (1/3)
$h_0$	0.53	número de horas fijas ofrecida por la familia (steady-state del trabajo)
$\gamma$	0.95	coeficiente del choque de productividad AR(1)
$\sigma_\epsilon$	0.00712	desviación estandar del choque a la productividad

$\theta$ ,  $\delta$  y  $\beta$  son tomados de Kydland y Prescott (1982).

## Modelo: Estado Estacionario I

A continuación se mencionan las principales ecuaciones del modelo y sus estados estacionarios, los cuales se introducirá en Dynare :

### 1 Oferta de trabajo:

$$\begin{aligned} -B &= \frac{W_t}{C_t} & (18) \\ -B &= \frac{W_{SS}}{C_{SS}}, \quad \text{steady state} \end{aligned}$$

### 2 Ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_t} &= \beta E_t \frac{1}{C_{t+1}} [r_t + (1 - \delta)] & (19) \\ r_{SS} &= \frac{1}{\beta} - (1 - \delta), \quad \text{steady state} \end{aligned}$$

## Modelo: Estado Estacionario II

### 3 Ecuación de movimiento del capital:

$$\begin{aligned}k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + i_t & (20) \\ i_{ss} &= \delta k_{ss}, \quad \text{steady state}\end{aligned}$$

### 4 Función de producción:

$$\begin{aligned}y_t &= A_t k_t^\theta h_t^{1-\theta} & (21) \\ y_{ss} &= A_{ss} k_{ss}^\theta h_{ss}^{1-\theta}, \quad \text{steady state}\end{aligned}$$

### 5 Demanda de capital:

$$\begin{aligned}k_t &= \theta \frac{y_t}{r_t} & (22) \\ k_{ss} &= \theta \frac{y_{ss}}{r_{ss}}, \quad \text{steady state}\end{aligned}$$

## Modelo: Estado Estacionario III

### 6 Demanda de trabajo:

$$h_t = (1 - \theta) \frac{y_t}{w_t} \quad (23)$$

$$h_{ss} = (1 - \theta) \frac{y_{ss}}{w_{ss}}, \quad \text{steady state}$$

### 7 Equilibrio en el mercado de bienes:

$$y_t = c_t + i_t \quad (24)$$

$$y_{ss} = c_{ss} + i_{ss}, \quad \text{steady state}$$

### 8 Choque de productividad:

$$\ln A_{t+1} = \gamma \ln A_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \text{ iid } N(0, \sigma_\epsilon) \quad (25)$$

$$\epsilon_{ss} = 0, \quad \text{en SS toma su media} \quad (26)$$

$$A_{ss} = 1, \quad \text{steady state}$$



## Modelo: Loglinearización I

Suponemos que deseamos expresar una variable en función de su desviación con respecto a su estado estacionario de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{x}_t &= \ln(x_t) - \ln(x_{ss}) & (27) \\ \hat{x}_t &= \ln\left[\frac{x_t}{x_{ss}}\right] \\ e^{\hat{x}_t} &= \frac{x_t}{x_{ss}} \\ x_t &= x_{ss}e^{\hat{x}_t}\end{aligned}$$

Para log-linearizar cada ecuación del modelo, sustituiremos las variables en niveles por esta última expresión.

- 1  $\hat{c}_t = \hat{w}_t$
- 2  $\hat{c}_t = \beta r_{ss} E_t \hat{r}_{t+1} - E_t \hat{c}_{t+1}$
- 3  $\hat{k}_{t+1} = (1 - \delta) \hat{k}_t + \delta \hat{i}_t$

## Modelo: Loglinearización II

$$4 \quad \hat{y}_t = \hat{A}_t + \theta \hat{k}_t + (1 - \theta) \hat{h}_t$$

$$5 \quad \hat{y}_t - \hat{h}_t = \hat{w}_t$$

$$6 \quad \hat{y}_t - \hat{k}_t = \hat{r}_t$$

$$7 \quad \frac{c_{ss}}{y_{ss}} \hat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \hat{i}_t = \hat{y}_t$$

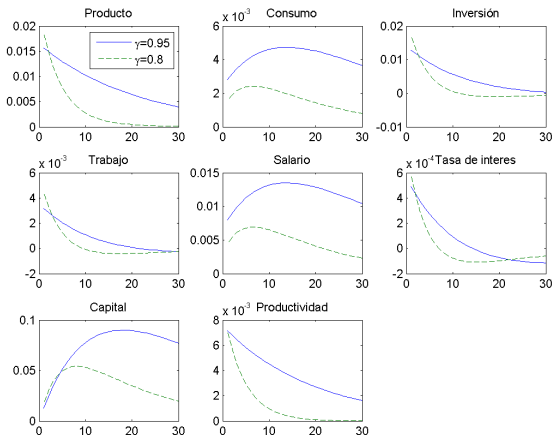
$$8 \quad \hat{A}_{t+1} = \gamma \hat{A}_t + \epsilon_t$$

## Tratamiento de los datos

- **Datos:** datos trimestrales 1955.3 - 1984.1 (115 datos)
- **Variables reales:** en dolares de 1972
- Todas las series son desestacionalizadas, rezagadas y se le aplicó el fitro HP (componente cíclico)

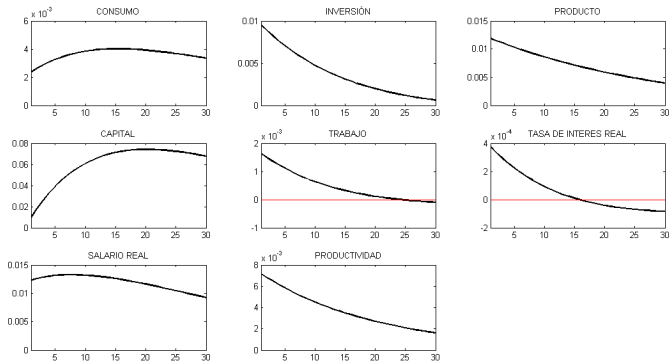
## Modelo: IRFs

### Modelo con trabajo indivisible

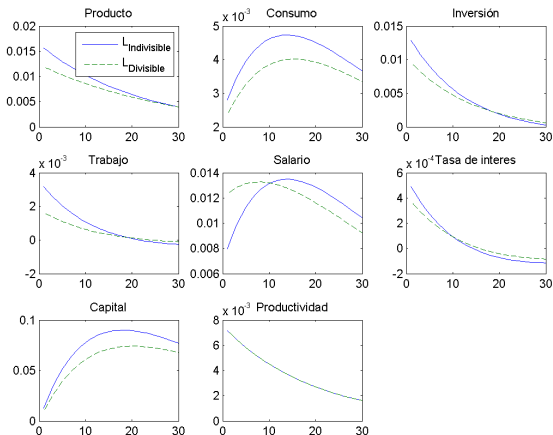


## Modelo: IRFs

### Modelo con trabajo divisible

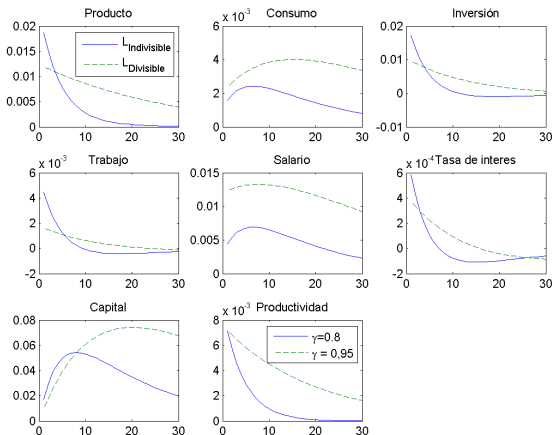


## Divisible vs. Indivisible Igual persistencia (0.95)



## Divisible vs. Indivisible

Diferente persistencia: indivisible(0.8) - divisible(0.95)



## Modelo: Simulaciones

### Economía artificial

- 1 Los estadísticos de las distribuciones muestrales que describen el comportamiento de la economía artificial fue derivado de “Simulaciones de Monte Carlo”
- 2 Se hizo 100 simulaciones del modelo con 115 periodos en cada simulación (misma longitud temporal de la datos reales). En cada simulación se obtuvo la senda temporal de las variables endógenas (datos artificiales).
- 3 Las variables simuladas fueron rezagadas y filtradas (HP)
- 4 A estas últimas variables se le calcula los estadísticos para cada simulación (100) y luego se toma la media de cada estadístico.



## Modelo: Momentos Teóricos vs. Empíricos

Standard deviations in percent (a) and correlations with output (b) for U.S. and artificial economies.

Series	Quarterly U.S. time series <sup>a</sup> (55,3-84,1)		Economy with divisible labor <sup>b</sup>		Economy with indivisible labor <sup>b</sup>	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
Output	1.76	1.00	1.35 (0.16)	1.00 (0.00)	1.76 (0.21)	1.00 (0.00)
Consumption	1.29	0.85	0.42 (0.06)	0.89 (0.03)	0.51 (0.08)	0.87 (0.04)
Investment	8.60	0.92	4.24 (0.51)	0.99 (0.00)	5.71 (0.70)	0.99 (0.00)
Capital stock	0.63	0.04	0.36 (0.07)	0.06 (0.07)	0.47 (0.10)	0.05 (0.07)
Hours	1.66	0.76	0.70 (0.08)	0.98 (0.01)	1.35 (0.16)	0.98 (0.01)
Productivity	1.18	0.42	0.68 (0.08)	0.98 (0.01)	0.50 (0.07)	0.87 (0.03)

<sup>a</sup>The U.S. time series used are real GNP, total consumption expenditures, and gross private domestic investment (all in 1972 dollars). The capital stock series includes nonresidential equipment and structures. The hours series includes total hours for persons at work in non-agricultural industries as derived from the *Current Population Survey*. Productivity is output divided by hours. All series are seasonally adjusted, logged and detrended.

<sup>b</sup>The standard deviations and correlations with output are sample means of statistics computed for each of 100 simulations. Each simulation consists of 115 periods, which is the same number of periods as the U.S. sample. The numbers in parentheses are sample standard deviations of these statistics. Before computing any statistics each simulated time series was logged and detrended using the same procedure used for the U.S. time series.

## Modelo: Momentos Teóricos vs. Empíricos

Estadísticos de los ciclos según el modelo artificial		
VARIABLE	Des.Stan	Corr. con y
c	0.5238	0.8690
i	5.7537	0.9914
y	1.8019	1.0000
k	0.5010	0.3546
h	1.3731	0.9820
r	1.8374	0.9622
w	0.5238	0.8690
a	0.9278	0.9999

## Código en Dynare-Matlab I

### Archivos .mod y m-files

- **modelo\_Hansen.mod:** es el modelo de Hansen(1985) de esta clase evaluado para dos valores de la persistencia del choque ( $\gamma = 0.95$  y  $\gamma = 0.8$ ). Los resultados de cada simulación se guardan en el archivo "oo1" y "oo2" respectivamente. También se usa el comando de matlab "subplot"
- **modelo\_trabajo\_Divisible.mod:** modelo RBC estándar manteniendo las mismas características y parámetros del modelo de Hansen con la única diferencia en la función de utilidad:
  - **Hansen:**  $u(c_t, h_t) = \ln c_t + B h_t$
  - **RBC\_estándar:**  $u(c_t, h_t) = \ln c_t + A \ln(1 - h_t)$

## Código en Dynare-Matlab II

### Archivos .mod y m-files

- **modelo\_Hansen\_hp\_filter.mod:** es el modelo de Hansen(1985) pero aplicando el filtro HP a las variables endógenas simuladas. Se considera data trimestral por lo cual se aplica un  $\lambda = 1600$ . Los resultados se guardan en el archivo "oohp" del cual se extraen los principales estadísticos de las variables simuladas.
- **grafico\_compa\_hansen.m:** compara los IRFs del modelo de Hansen (oo1) y del modelo con trabajo divisible (oo3) bajo una misma persistencia ( $\gamma = 0.95$ )