Clase 5B: Métodos de solución de modelos DSGE

Macrodinámica I

Hamilton Galindo

Junio - Agosto
2015

Contenido

Fundamentos I

1. Métodos para obtener soluciones numéricas de los modelos DSGE
2. Estos métodos son usados para obtener soluciones estables para cualquier sistema de ecuaciones en diferencia estocástica no lineal.
3. En la solución del modelo nos tenemos que asegurar que la solución sea estable; es decir, una solución en la cual las variables per cápita no explote rápidamente. Para ello hay que imponer condiciones de estabilidad sobre la solución.
4. Solución numérica: es un conjunto de series de tiempo, una para cada variable relevante en el modelo económico, que en cada periodo satisface todas las condiciones en el modelo.
5. Simulación: es un procedimiento por el cual una solución numérica es encontrada para cada realización del vector estocástico del choque exógeno que afecta a la economía.
6. Tres métodos para resolver el sistema log-lineal (encontrar la solución numérica):

Fundamentos II

- Coeficientes indeterminados (Uhlig, xxx)
- Blanchar y Kahn ()
- Método de descomposición eigenvalore-eigenvectores (C.A. Sims, xxxx)

Nota: estos métodos son para sistemas lineales (o log-lineales). Los métodos para sistemas no lineales son dos: [1] Método de expectativas parametrizadas (den Hann-Marcet): usan las condiciones de primer orden, pero apróxima las expectativas condicionales (que aparecen en la condiciones de primer orden) por polinomios exponeniales y [2] Clase de nétodos de proyección: que parametrizan las reglas de decisión o las ecuaciones de control como funciones polinomiales de las variables de estado.

7. La principal diferencia de estos métodos es el camino por el cual las condiciones de estabilidad son impuestas sobre la solución numérica.

8.

Método de Blanchard y Khan (1980)

1. Este método está basado en la idea de resolver el sistema lineal por medio de encontrar la senda estable del sistema no lineal.
2.

Forma estado-espacio I

[1] Forma estado-espacio generalizado

La forma estado-espacio generalizada para sistemas de ecuaciones no lineales, dinámicas y estocásticas con expectativas es:

$$A_0 E_t X_{t+1} = A_1 X_t + B_0 v_{t+1} \tag{1}$$

- En la literatura existe varios métodos para resolver este tipo de modelos (ver DeJong y Dave, XXXX):
- El método de Blanchard y Kahn (1980) usa la descomposición de Jordan cuando la matriz A_0 es invertible. Cuando no es invertible usa la descomposición QZ.

Forma estado-espacio II

[2] Forma estado-espacio alternativa

$$\begin{aligned} A_0 E_t X_{t+1} &= A_1 X_t + B_0 v_{t+1} \\ E_t X_{t+1} &= \underbrace{A_0^{-1} A_1}_{=A} X_t + \underbrace{A_0^{-1} B_0}_{=B} v_{t+1} \\ E_t X_{t+1} &= A X_t + B v_{t+1} \end{aligned} \tag{2}$$

- En la ecuación [2] la variable v_{t+1} puede ser choques iid con: media igual a cero ($E(v_t) = 0$) y autocorrelación nula. Alternativamente, v_{t+1} puede comportarse como un proceso AR(1), la cual depende de choques exógenos iid.

Forma estado-espacio III

- En este sistema de ecuaciones se puede definir dos tipos de variables: [1] w_t es el vector de variables *backward looking* (predeterminadas o variables de estado), y [2] y_t es el vector de variables *forward looking* (variables de control):

$$X_t = \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Introduciendo lo anterior en la ecuación [2] se tiene:

$$\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + B v_{t+1} \tag{3}$$

Transformando el sistema de ecuaciones I

[1] Descomposición de Jordan de A

$$\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + Bv_{t+1} \tag{4}$$

- La matriz A puede ser expresada (por la descomposición de Jordan) de la siguiente manera:

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

Donde P son los eigenvectores y Λ es la matrix diagonal de eigenvalores.

Transformando el sistema de ecuaciones II

- Al introducir la descomposición de A en la ecuación [4] se tiene:

$$\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = P \Lambda P^{-1} \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + B v_{t+1} \tag{5}$$

Ordenando los términos:

$$P^{-1} \begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda P^{-1} \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + P^{-1} B v_{t+1} \tag{6}$$

Donde: $P^{-1}B = R$

[2] Partición del modelo

Transformando el sistema de ecuaciones III

- La matriz Λ, que representa los valores propios, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

En la cual Λ_1 es el eigenvalor estable y Λ_2 es el inestable.

- En base a esta partición la matriz de eigevectores se particiona también:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Asimismo se hace con matrix R:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

[3] Sistema de ecuaciones transformado

Transformando el sistema de ecuaciones IV

- Al introducir las particiones descritas en la ecuación [6] se tiene:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} v_{t+1} \tag{8}$$

- Se define dos nuevas variables: $\widetilde{y}_t$ y $\widetilde{w}_t$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t \\ E_t y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{w}_t \\ \widetilde{y}_t \end{bmatrix} \tag{9}$$

- Lo anterior implica que:

$$\widetilde{w}_t = P_{11} w_t + P_{12} y_t \tag{10}$$
$$\widetilde{y}_t = P_{21} w_t + P_{22} y_t \tag{11}$$

Transformando el sistema de ecuaciones V

[4] Desacoplamiento de las ecuaciones

- De la ecuación [9] se podría obtener dos ecuaciones; es decir, el sistema se puede desacoplar:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t \\ E_t y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{w}_t \\ \widetilde{y}_t \end{bmatrix} \tag{12}$$

Esta ecuación implica dos ecuaciones:

Ecuación estable

$$\widetilde{w}_{t+1} = \Lambda_1 \widetilde{w}_t + R_1 v_{t+1} \tag{13}$$

Ecuación inestable

$$\widetilde{y}_{t+1} = \Lambda_2 \widetilde{w}_t + R_2 v_{t+1} \tag{14}$$

La ventaja de este desacoplamiento es que cada ecuación puede ser resuelta por separado.

Solución I

[1] Estrategia de solución

- Resolver la ecuación inestable transformada.
- Resolver la ecuación estable transformada.
- Trasladar la solución anterior al problema original.

[2] Solución de la ecuación inestable

- La ecuación inestable es:

$$\widetilde{y}_{t+1} = \Lambda_2 \widetilde{w}_t + R_2 v_{t+1} \tag{15}$$

- Resolviendo esta ecuación hacia adelante $(t + j)$:

$$E_t \widetilde{y}_{t+j} = (\Lambda_2)^j \widetilde{y}_t \tag{16}$$

Solución II

- Como $\|\Lambda_2\| > 1$, la única solución estable es $\widetilde{y}_t = 0$, $\forall t$. Entonces se tiene que:

$$\widetilde{y}_t = P_{21} w_t + P_{22} y_t = 0$$

y por tanto:

$$y_t = -P_{22}^{-1} P_{21} w_t \tag{17}$$

Esta ecuación expresa las variables de control (*forward looking*) en función de las variables de estado (predeterminadas). Por tanto, esta ecuación representa la **función de política**.

[3] Solución de la ecuación estable

- La ecuación estable es:

$$\widetilde{w}_{t+1} = \Lambda_1 \widetilde{w}_t + R_1 v_{t+1} \tag{18}$$

Solución III

- Resolviendo esta ecuación hacia adelante $(t+j)$:

$$E_t \widetilde{w}_{t+j} = (\Lambda_1)^j \widetilde{w}_t \tag{19}$$

- Como $\|\Lambda_1\| < 1$, no hay problemas de inestabilidad. Entonces al resolver simultaneamente la ecuación [17] que se obtiene del componente inestable $(y_t = -P_{22}^{-1} P_{21} w_t)$ y la definición de $\widetilde{w}_t$ $(\widetilde{w}_t = P_{11} w_t + P_{12} y_t)$ se tiene que:

$$\widetilde{w}_t = (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}) w_t \tag{20}$$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación estable [17]:

$$\widetilde{w}_{t+1} = \Lambda_1 \widetilde{w}_t + R_1 v_{t+1}$$

Considerando

$$\widetilde{w}_t = (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}) w_t \widetilde{w}_{t+1} = (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}) w_{t+1}$$

Solución IV

Se tiene que:

$$\begin{aligned} w_{t+1} &= (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1}\Lambda_1(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})w_t \\ &\quad +(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1}R_1 v_{t+1} \end{aligned} \tag{21}$$

Esta ecuación expresa la **dinámica de las variables de estado**.

[4] Solución total

La solución total del sistema está descrito por la ecuación [21] y [17]:

$$\begin{aligned} y_t &= -P_{22}^{-1}P_{21}w_t \\ w_{t+1} &= (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1}\Lambda_1(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})w_t \\ &\quad +(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1}R_1 v_{t+1} \end{aligned}$$

Solución V

Todas las variables están en función de las variables de estado (predeterminadas). Cabe mencionar que este sistema tiene una **estructura recursiva**.

[5] Formulación recursiva

Para el cálculo de IRF y momentos se sigue los siguientes pasos:

1. Empezar del valor de estado estacionario: $w_0 = 0$ (recordar que las variables son log-lineales).
2. Simular choques $\{v_t\}$ de la distribución normal.
3. Simular $\{w_t\}$ de $\{v_t\}$ recursivamente usando la ecuación de la **dinámica de las variables de estado**:

$$\begin{aligned} w_{t+1} &= (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1}\Lambda_1(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})w_t \\ &\quad +(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21})^{-1}R_1 v_{t+1} \end{aligned}$$

Solución VI

4. Calcular $\{y_t\}$ de $\{w_t\}$ usando la función de política:

$$y_t = -P_{22}^{-1} P_{21} w_t$$

5. Finalmente, calcular IRF y momentos.

Un ejemplo I
Modelo de Brock y Mirmam (xxxx)

el modelo está en la pag 203

[1] Condiciones de primer orden

[2] Sistema log-lineal

pag 210

[3] Solución del sistema: método de BK

pag 212

Un ejemplo en Matlab
Modelo de Brock y Mirmam (xxxx)

ver el programa Blanchard_Kahn.m

Qué método usa Dynare

El método de perturbación